

DIETMAR WILLIAM FORYTA

Forças de Radiações Eletromagnéticas sobre
Corpos Esféricos em Movimento
Translacional e Rotacional

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

CURITIBA
1989



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DO SR. DIETMAR WILLIAM FORYTA

Em sessão pública de defesa de tese iniciada às 10:00 horas, nesta data, após um seminário sobre o assunto da tese e arguição pela banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 15 de setembro de 1989.

Banca Examinadora:

Prof. GERMANO BRUNO AFONSO

Presidente - UFPR

Prof. ROBERTO VIEIRA MARTINS

ON/CNPq - RJ

Prof. MASAYOSHI TSUCHIDA

IAG/USP

À minha esposa, Regina.

Agradecimentos

Desejo exprimir, com grande satisfação, os meus agradecimentos a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial agradeço:

Ao Professor Germano Bruno Afonso pela amizade e pela orientação, sempre segura e dedicada, que me proporcionou.

Aos Professores Bin Kan Cheng, Liu Kai, Gilberto Medeiros Kremer, Paula Vercelli e Cristiano Graf pela amizade, pelo incentivo e pelas críticas construtivas.

Ao Professor Sérgio Berleze pela amizade e pelo auxílio computacional sempre presente.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

E a todos que, embora não relacionados aqui, sempre nos dirigiram palavras de estímulo e consideração.

Resumo

Desenvolve-se um modelo dependente do tempo para as forças translacionais de radiações eletromagnéticas tanto para as absorvidas e espalhadas como também para as termicamente emitidas. Resolvendo-se uma equação dependente do tempo para a difusão de energia térmica, mostra-se que os efeitos conhecidos na literatura científica como *Yarkovsky* e *Inverno-Verão* são casos particulares de um mesmo fenômeno que é o da existência de uma inércia térmica característica. Estende-se o modelo para os casos que envolvem fontes de radiações eletromagnéticas de dimensões finitas, e aplicam-se os resultados obtidos para o satélite *CASTOR*. Utilizando-se o tratamento relativístico restrito, extraem-se os efeitos conhecidos como *Poynting-Robertson* e *Doppler-Diferencial*. Desenvolve-se também o modelo para as forças rotacionais de radiações eletromagnéticas.

Abstract

A time dependent model is developed for the translational electromagnetic radiation force due to the radiation absorption and scattering as well as to the thermal radiation emission. A time dependent thermal energy diffusion equation is solved to show that the well known *Yarkovsky* and *Summer–Winter* effects are particular cases of the same phenomenon: the thermal inertia existence. The model is extended for finite dimensions electromagnetic radiation source, and its results are applied to *CASTOR* satellite. By using the special relativistic treatment, the known *Poynting–Robertson* and *Doppler–Differential* effects were easily obtained. A rotational electromagnetic radiation force is also developed.

Índice Analítico

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice Analítico	v
Introdução	1
Capítulo Primeiro: Forças de Radiações Eletromagnéticas Termo-Emitidas	6
1.1 Taxa de Momentum Linear transferido por Elementos de Área	7
1.2 Taxa de Momentum Linear transferido por Corpos Esféricos	9
1.3 Solução Linearizada do Problema Semi-Linear de Difusão de Calor	10
1.4 Taxa de Momentum Linear transferido por Corpos Negros não-Perfeitos	16
1.5 Aplicações do Modelo para Fontes de Radiações de Dimensões Pontuais	18
Capítulo Segundo: Tratamento Relativístico Restrito para Forças de Radiações	24
2.1 Forças de Radiações Eletromagnéticas Incidentes	25
2.2 Forças de Radiações Eletromagnéticas Termo-Emitidas	30

<i>Índice Analítico</i>	vi
2.3 Aplicações do Modelo para Fontes de Radiações de Dimensões Pontuais	32
Capítulo Terceiro: Torque Relativísticos de Radiações Eletromagnéticas	37
3.1 Torques de Radiações Eletromagnéticas Incidentes	37
3.2 Torques de Radiações Eletromagnéticas Termo-Emitidas	41
3.3 Aplicações do Modelo para Fontes de Radiações de Dimensões Pontuais	44
Capítulo Quarto: Fontes de Radiações Eletromagnéticas de Dimensões Finitas	48
4.1 Forças de Radiações Eletromagnéticas Incidentes	48
4.2 Forças de Radiações Eletromagnéticas Termo-Emitidas	52
4.3 Tratamento Relativístico Restrito para Forças de Radiações	53
4.4 Experimento Computacional Semi-Analítico para Fontes Finitas	55
Conclusões	64
Referências Bibliográficas	66

Introdução

O sistema físico considerado neste trabalho será constituído por dois corpos, um que passará a chamar-se *corpo material orbitante*, pois é constituído de matéria, que translada imerso em um campo de radiações sob forma de ondas eletromagnéticas nas circunvizinhanças do outro corpo que, por sua vez, passará a chamar-se *corpo fonte emissor de radiações eletromagnéticas*. Considere como corpo orbitante, um corpo negro não-perfeito, sendo o corpo fonte de radiações eletromagnéticas mais massivo. As radiações eletromagnéticas incidentes ao corpo negro não-perfeito, são provenientes preferencialmente da posição do corpo fonte de radiações eletromagnéticas. Então haverá uma taxa de permuta de quantidades de momentum linear e de energia mais significativa na região superficial do corpo orbitante onde ocorre a incidência direta de radiações eletromagnéticas oriundas da fonte de radiações, isto é, sem que tenham as radiações eletromagnéticas incidentes interagido com qualquer outro elemento do meio espacial. As radiações eletromagnéticas serão, em ordem de maior interesse, absorvidas, espalhadas reflexivamente e/ou espalhadas refrativamente pela porção de matéria com que interagem. Nesta interação, a porção de matéria e as radiações eletromagnéticas com que a matéria interage, permutarão quantidades de momentum linear e de energia. Para corpos negros não-perfeitos, as interações

nas quais as radiações eletromagnéticas serão refratadas, podem ser consideradas negligenciáveis.

Cada elemento da superfície do corpo negro não-perfeito contribuirá na taxa total de permuta de quantidades de momentum linear, que identificar-se-á como uma força que contribuirá, predominantemente, para o aumento da distância que separa os corpos fonte e orbitante. Contribuirá, também, na taxa total de permuta de quantidades de energia eletromagnética, o que implicará, de maneira geral, na existência de distribuições volumétrica e superficial de temperatura termodinâmica não-uniformes.

O modelo no qual se determina o vetor taxa total de permuta de quantidades de momentum linear devida exclusivamente à absorção e ao espalhamento reflexivo das radiações eletromagnéticas incidentes à superfície do corpo orbitante, é conhecido como *Modelo de Pressão de Radiação* (Burns et al., 1979).

Todo corpo sujeito à uma distribuição superficial de temperatura termodinâmica apresentará uma taxa de emissão de energia sob forma de radiações eletromagnéticas. Quanto maior for o valor da temperatura termodinâmica do elemento de área da superfície do corpo, relacionalmente tanto maior será o valor da taxa de energia sob forma de radiações eletromagnéticas emitidas por este elemento de área.

Para corpos orbitantes dotados de condutividade térmica com valor fisicamente infinito, e de dimensões lineares volumétricas e superficiais fisicamente pequenas, pode-se assumir que a distribuição superficial de temperatura termodinâmica é uniforme. Conseqüentemente o vetor taxa de momentum linear transferido à partir da superfície do corpo orbitante para o seu exterior por emissão de energia sob forma de radiações eletromagnéticas será isotropa, não resultando portanto, do ponto de vista não-relativístico, em contribuições sob forma de forças sobre a translação do corpo orbitante nas circunvizinhanças do corpo fonte de radiações eletromagnéticas. Todavia do ponto de vista relativístico, quer restrito quer geral, o corpo orbitante apresentará, para um observador em um sistema de referência solidário ao corpo fonte, uma distribuição vetorial de taxa superficial

de transferência de momentum linear, por emissão de energia térmica sob forma de radiações eletromagnéticas do interior para o exterior. Em relação a distribuição observada em um sistema de referência solidário ao corpo orbitante será tanto maior quanto mais próximo da direção e sentido da do vetor velocidade do corpo orbitante e algo menor quanto mais próximo da direção e sentido oposto da do vetor velocidade de translação do corpo orbitante. Então, mesmo para um corpo que apresente uma distribuição superficial de temperatura termodinâmica uniforme, haverá uma contribuição sobre o comportamento do vetor velocidade de translação do corpo orbitante em um sistema de referência solidário ao corpo fonte, que assemelhar-se-á a uma força de arrasto contrária a do vetor velocidade de translação do corpo orbitante. Esta contribuição, sob forma de uma força de arrasto, na absorção, no espalhamento reflexivo de radiações eletromagnéticas incidentes e na emissão térmica de radiações eletromagnéticas devida a distribuição superficial de temperatura termodinâmica uniforme, é usualmente conhecida na literatura científica como *Efeito Poynting-Robertson*, nome este devido aos trabalhos destes dois pesquisadores (Poynting, 1903 e Robertson, 1937).

Quando admite-se que as dimensões lineares do corpo fonte de radiações eletromagnéticas não podem ser negligenciadas, extraem-se novos efeitos que atuarão sobre o movimento translacional do corpo material orbitante nas circunvizinhanças do corpo fonte de radiações eletromagnéticas. Entre estes pode-se destacar o efeito devida à existência de uma frequência de rotação do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, ou seja, que elementos de área da superfície do corpo fonte de radiações movem-se a diferentes velocidades relativas a um dado elemento de área da superfície do corpo material orbitante alvo das radiações eletromagnéticas emitidas pelo corpo fonte, acarretando distorções da distribuição superficial de taxa de energia eletromagnética incidente. Este efeito foi identificado e estimado por Mc. Donough (Burns et al., 1979) e é denominado atualmente pelo nome de *Efeito Doppler-Diferencial*.

Os fatos experimentais conhecidos afirmam que os corpos não são dotados de condutividade térmica de valores nem infinitos nem macroscopicamente infinitesimais.

Também deve-se admitir preferencialmente que os corpos orbitantes não estão dotados, de maneira geral, de dimensões volumétricas e superficiais nem infinitas nem macroscopicamente infinitesimais. Então, devida à existência de uma distribuição superficial de taxa de absorção de quantidades de energia sob forma de ondas eletromagnéticas incidentes, de emissão de quantidades de energia térmica sob forma de radiações eletromagnéticas e da difusão de energia sob forma térmica com os outros elementos de volume e de superfície do corpo orbitante, o corpo orbitante apresentará distribuições, tanto volumétrica como superficial, de temperatura termodinâmica e de densidade de fluxo de energia térmica.

Para o caso particular de corpos orbitantes que descrevam, em sua translação, uma órbita circular em torno do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, que os períodos de revolução do corpo orbitante em torno do seu próprio eixo de rotação e o de translação orbital em torno do corpo fonte de radiações eletromagnéticas sejam idênticos e que o vetor momentum angular de rotação tenha a mesma direção e sentido do vetor momentum angular referente a translação orbital, a distribuição de temperatura termodinâmica resultante, num tratamento não-relativístico, contribuirá exclusivamente para o aumento da distância que separa os corpos, fonte e orbitante.

Entretanto poder-se-á identificar novos efeitos devida à existência de uma distribuição superficial de temperatura termodinâmica não-uniforme oriunda da existência de uma inércia térmica característica não-nula e fisicamente não-infinita. Na literatura científica constam dois efeitos, considerados distintos, conhecidos como *Efeito Yarkovsky* (Burns et al., 1979) e *Efeito Inverno-Verão* (Afonso et al., 1989), que entretanto não o são (Afonso e Foryta, 1989). O *Efeito Yarkovsky* é caracterizado, de maneira bem simplificada, por regiões superficiais, que dirigem-se para o domínio não-iluminado, que apresentem temperaturas superficiais algo maiores do que as respectivas regiões não-iluminadas que passam para o domínio iluminado, isto é, as temperaturas após o amanhecer são algo menores que as imediatamente antes do anoitecer. O *Efeito Inverno-Verão*, tomando a Terra como exemplo mais acessível, é caracterizado por distribuições de temperatura algo

maiores em um hemisfério do que no outro, pois no dado hemisfério que apresenta temperaturas algo maiores o período iluminado é algo maior que no outro hemisfério, isto é, o primeiro hemisfério está no verão e o outro no inverno.

Desenvolver-se-á então, no primeiro capítulo, um modelo dependente do tempo que descreve as forças translacionais de radiações eletromagnéticas termicamente emitidas, por meio da resolução de uma equação dependente do tempo que descreve a difusão de energia sob forma térmica, no volume e na superfície de um corpo de forma esférica. As conseqüências que sobreveem são os efeitos conhecidos na literatura científica como *Efeito Yarkovsky* e *Efeito Inverno-Verão*, o que demonstra serem estes casos particulares de um mesmo fenômeno que é o caracterizado pela existência de uma inércia térmica característica. No segundo capítulo utiliza-se sobre o modelo proposto um tratamento relativístico restrito de onde se extrai o efeito conhecido como *Efeito Poynting-Robertson*. No capítulo terceiro desenvolve-se também o modelo para as forças rotacionais de radiações eletromagnéticas, de onde se extraem informações que contribuem para explicar o decréscimo do vetor momentum angular de rotação conhecido para o satélite *LAGEOS*. No capítulo quarto estende-se o modelo de forças de radiações proposto para os casos que envolvem corpos fonte de radiações eletromagnéticas de dimensões finitas e obtém-se o *Efeito Doppler-Diferencial* com naturalidade. Os resultados obtidos são aplicados para o satélite *CASTOR*.

Capítulo Primeiro

Forças de Radiações Eletromagnéticas Termo-Emitidas

Os elementos de superfície do corpo orbitante sempre emitem termicamente quantidades não-nulas de energia, para o exterior da superfície, sob forma de ondas eletromagnéticas. Não somente energia será transferida para o exterior neste processo, mas também quantidades de momentum linear serão transportados pelas ondas eletromagnéticas emergentes, o que acarretará na existência de um impulso sobre o corpo orbitante, expressa segundo a lei de conservação de momentum linear.

Escolhe-se como corpo material orbitante, sem perda de generalidade, um corpo negro não-perfeito opaco de forma superficial esférica de raio R , para se desenvolver o modelo dependente do tempo para as forças devidas à emissão térmica de radiações eletromagnéticas. Outrossim o corpo orbitante é constituído por um intrincado agregado de átomos e/ou moléculas, onde podem estar estes constituintes da matéria, individual ou coletivamente, eletricamente neutros, eletrizados e/ou até multiplamente ionizados.

Quando quantidades de radiações sob forma de ondas eletromagnéticas incidem sobre a matéria, ambos interagirão e, então, uma dada fração da taxa de energia eletromagnética transportada pelas ondas eletromagnéticas incidentes será absorvida. O elemento de área, na qual as ondas eletromagnéticas incidem, permutará quantidades de

energia, agora, depois de absorvidas, sob forma térmica, com o meio exterior a superfície do corpo, por meio de emissão de ondas eletromagnéticas e com os outros elementos de volume e de superfície vizinhos sob forma de difusão de energia térmica. Os elementos de volume também permutarão quantidades de energia, única e exclusivamente, sob forma térmica com outros elementos de volume e eventuais elementos de superfície vizinhos.

Sem necessariamente perder muito em generalidade, considerar-se-á constantes a densidade volumétrica de massa, bem como o calor específico à volume constante, a condutividade térmica e os índices de emissividade e de absorvidade.

1.1. Taxa de Momentum Linear Transferido por Elementos de Área

Considere um elemento de área fisicamente pequeno da superfície de um determinado corpo, cuja forma superficial é suavemente convexa, ao qual ajusta-se de maneira bem conveniente uma base vetorial ortonormal dextrogira $(\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$, onde o vetor de base de módulo unitário \hat{k}' é escolhido de maneira a coincidir com a direção da reta normal ao centro geométrico do especificado elemento de área, com sentido do interior para o exterior do determinado corpo. Associa-se, então, ao centro geométrico do referido elemento de área do dado corpo, um sistema de duas coordenadas angulares polares esféricas (θ', ϕ') , onde uma dada direção (θ', ϕ') , neste sistema bidimensional de coordenadas angulares, distância-se angularmente à partir da direção positiva do vetor de base de módulo unitário \hat{k}' por um valor θ' , e à partir da direção positiva do vetor de base de módulo unitário \hat{i}' por um valor ϕ' , como mostra esquematicamente abaixo, a figura (1.1).

Seja, então, $I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t)$ a taxa de energia eletromagnética emitida pelo referido elemento de área $dA(\beta', t)$, do interior para o exterior do corpo, por meio de ondas eletromagnéticas com frequência entre ν e $\nu + d\nu$, função do parâmetro temporal t e de um conjunto, aqui arbitrário, de parâmetros físico-geométricos β' . Admitindo-se que à partir

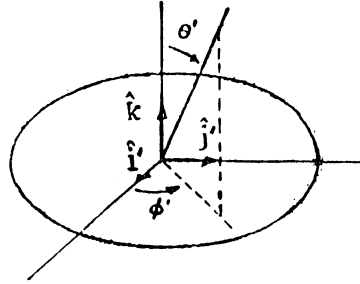


figura (1.1)

do elemento de área $dA(\beta', t)$, da superfície do corpo, a emissão de ondas eletromagnéticas, para um observador situado no centro geométrico do elemento de área, for independente da coordenada angular azimutal ϕ' , então a taxa de energia eletromagnética transferida pelo especificado elemento de área $dA(\beta', t)$, do interior para o exterior do dado corpo, numa direção entre θ' e $\theta' + d\theta'$ e entre ϕ' e $\phi' + d\phi'$, por meio de emissão de ondas eletromagnéticas, é dada pela expressão

$$-\frac{1}{\pi} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \cos\theta' \sin\theta' d\theta' d\phi'. \quad (1.1)$$

Portanto, o vetor taxa elementar de momentum linear transferido pelo elemento de área é dada pela expressão

$$-\frac{1}{\pi c} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \cos\theta' (\sin\theta' \cos\phi' \hat{i}' + \sin\theta' \sin\phi' \hat{j}' + \cos\theta' \hat{k}') \sin\theta' d\theta' d\phi', \quad (1.2)$$

onde c é o módulo da velocidade da luz no vácuo.

Então, para obter-se, à partir das contribuições vetoriais elementares expressão equação (1.2), o vetor taxa elementar de momentum linear $\vec{F}_t(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t)$ transferido pelo especificado elemento de área, dever-se-á somar todas as contribuições em

todas as possíveis direções angulares (θ', ϕ') , onde a coordenada angular colatitudinal θ' varia, em unidades de radianos, entre os valores 0 e $\pi/2$ e a coordenada angular azimutal ϕ' varia, em unidades de radianos, entre os valores 0 e 2π , o que resulta na expressão

$$\begin{aligned} \vec{F}_t(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) = & - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{c\pi} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \cos\theta' (\text{sen}\theta' \cos\phi' \hat{i}' + \\ & + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \hat{j}' + \cos\theta' \hat{k}') \text{sen}\theta' d\theta' d\phi', \end{aligned} \quad (1.3)$$

ou quando a integração é executada, tem-se a expressão a seguir

$$\vec{F}_t(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) = -\frac{2}{3c} I(\nu, \beta', t) d\nu d\vec{A}(\beta', t), \quad (1.4)$$

onde $d\vec{A}(\beta', t)$ é o vetor elemento de área da superfície do dado corpo, e é definida pela expressão $d\vec{A}(\beta', t) = \hat{k}' dA(\beta', t)$.

1.2. Taxa de Momentum Linear Transferido por Corpos Esféricos

Considere, como corpo dado de forma superficial suavemente convexa, um corpo esférico de raio R , em cujo centro geométrico ajustamos de forma bem conveniente uma base vetorial ortonormal destrogira $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, onde o vetor de base de módulo unitário \hat{k} é escolhido de maneira à coincidir com a mesma direção e sentido da que apresenta o vetor momentum angular de rotação do corpo aqui considerado, e, também no mesmo ponto, um sistema tridimensional de coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ) , como apresentado esquematicamente na figura (1.2).

Tendo-se em vista estas considerações, pode-se escrever o vetor taxa elementar de momentum linear $\vec{F}_t(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t)$ induzido pelo elemento de área $R^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi$,

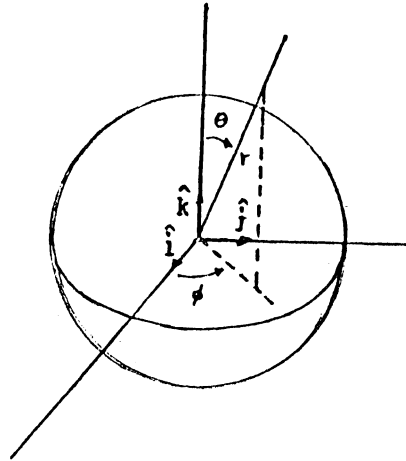


figura (1.2)

como sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) = & -\frac{2}{3c} I(\nu, \beta', t) d\nu (\text{sen}\theta \cos\phi \hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{\mathbf{j}} + \\ & + \cos\theta \hat{\mathbf{k}}) R^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Observe que o conjunto de parâmetros físico-geométricos β' transforma-se em $\{\theta, \phi, \beta\}$, onde β é um conjunto arbitrário de parâmetros físico-geométricos.

Então, o vetor taxa elementar de momentum linear $\vec{\mathbf{F}}_t(\nu, \beta, t) d\nu$ induzido é dada pela soma de todas as contribuições em todas as possíveis direções, onde a coordenada angular colatitudinal θ varia, em unidades de radianos, entre 0 e π e a coordenada angular azimutal ϕ varia, em unidades de radianos, entre os valores 0 e 2π

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_t(\nu, \beta, t) d\nu = & -\frac{2}{3c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I(\nu, \theta, \phi, \beta, t) d\nu (\text{sen}\theta \cos\phi \hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{\mathbf{k}} + \\ & + \cos\theta \hat{\mathbf{k}}) R^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.3. Solução Linearizada do Problema Semi-Linear da Difusão de Calor

Suponha que o problema diferencial semi-linear dependente do tempo de difusão de calor abaixo, represente a difusão de energia térmica para um corpo material orbitante

$$\frac{\rho C_P}{k} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad 0 \leq r \leq R, \quad (1.7)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial r} = \alpha_a I - \epsilon \sigma u^4 \quad r = R, \quad (1.8)$$

onde os símbolos presentes nas expressões são:

$u(r, \theta, \phi, t, \beta)$ a distribuição de temperatura termodinâmica do corpo, função do parâmetro temporal t e de um conjunto, aqui arbitrário, de parâmetros físicos β , a função incógnita do problema diferencial;

$I(R, \theta, \phi, t, \beta)$ a distribuição superficial de taxa de energia oriunda da absorção de quantidades de energia transportadas por frações das radiações eletromagnéticas incidentes à superfície do corpo, função conhecida do problema;

ρ a densidade de massa do corpo, constante e conhecida

C_P o calor específico à pressão constante, constante e conhecido;

k a condutividade térmica do corpo, constante e conhecido;

α_a a absorvidade da superfície do corpo, constante e conhecido;

ϵ a emissividade da superfície do corpo, constante e conhecida;

σ a constante fundamental de Boltzmann;

R o raio do corpo.

Suponha que a função incógnita $u(r, \theta, \phi, t, \beta)$, solução da equação diferencial parcial (1.7) que reje o problema diferencial semi-linear de difusão de calor, equações (1.7)

e (1.8), seja separável nas variáveis r , θ , ϕ e t , mas não no conjunto, aqui arbitrário, de parâmetros físicos β ,

$$u(r, \theta, \phi, t, \beta) = L(r, \beta)\Theta(\theta, \beta)\Phi(\phi, \beta)T(t, \beta), \quad (1.9)$$

e substituindo a expressão solução (1.9) na equação diferencial parcial (1.7), obtem-se, após algumas transformações, quatro equações diferenciais ordinárias nas variáveis independentes r , θ , ϕ e t

$$\frac{\rho C_P}{k} \frac{dT(t, \beta)}{dt} + a_1 T(t, \beta) = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2 L(r, \beta)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dL(r, \beta)}{dr} + (a_1 - \frac{a_2}{r^2}) L(r, \beta) = 0, \quad (1.11)$$

$$\frac{d^2 \Theta(\theta, \beta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta(\theta, \beta)}{d\theta} + (a_2 - \frac{a_3}{\sin^2 \theta}) \Theta(\theta, \beta) = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi, \beta)}{d\phi^2} + a_3 \Phi(\phi, \beta) = 0, \quad (1.13)$$

onde as constantes a_1 , a_2 e a_3 são constantes de separação de variáveis.

Objetivando a obtenção de funções estacionárias no parâmetro temporal, como solução da equação diferencial de difusão de calor, escolhe-se o valor da constante de separação de variáveis a_1 presente na equação (1.10) como sendo $-i\nu\rho C_P/k$, onde ν é um número real positivo com unidades do inverso do tempo. Escolhe-se os valores das constantes de separação de variáveis a_2 e a_3 como sendo, respectivamente, $n(n+1)$ e m^2 , onde n e m são números inteiros positivos, com o fito de que a solução, suposta na forma da equação (1.9), seja expressa para a coordenada independente θ , como funções associadas de Legendre de primeira e de segunda espécie. Tendo-se isto em conta, as soluções das equações diferenciais ordinárias (1.10), (1.11), (1.12) e (1.13) são, respectivamente (Abramowitz, 1965)

$$T(t, \beta) = a'_0(\beta) \exp(i\nu t), \quad (1.14)$$

$$L(r, \beta) = a'_1(\beta) j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{k} \right)^{1/2} r \right] + b'_1(\beta) y_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{k} \right)^{1/2} r \right], \quad (1.15)$$

$$\Theta(\theta, \beta) = a'_2(\beta) P_{nm}(\cos \theta) + b'_2(\beta) Q_{nm}(\cos \theta), \quad (1.16)$$

$$\Phi(\phi, \beta) = a'_3(\beta) \exp(im\phi) + b'_3(\beta) \exp(-im\phi), \quad (1.17)$$

onde as funções $j_{n\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R]$ e $y_{n\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R]$ são as Funções de Bessel esféricas de ordem n de Primeiro e Segundo Tipos (Abramowitz, 1965)

O domínio de valores no qual as variáveis independentes r , θ , ϕ e t assumem, no interesse de obter-se a solução do problema diferencial semi-linear de difusão de calor para um corpo esférico, são $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $-\infty < t < +\infty$. Portanto a solução pretendida não deve deixar de assumir valores finitos dentro deste domínio, o que obriga serem $b'_1(\beta)$ e $b'_2(\beta)$ nulos. Conseqüentemente, a expressão solução (1.9) pode ser escrita, como uma combinação das expressões (1.14), (1.15), (1.16) e (1.17), onde deve-se somar todas as possíveis (n, m, ν) componentes onde $0 \leq n \leq +\infty$, $-n \leq m \leq +n$ e $-\infty < \nu < +\infty$,

$$u(r, \theta, \phi, t, \beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{nm\nu}(\beta) j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{k} \right)^{1/2} r \right] P_{nm}(\cos \theta) \cdot \exp(im\phi) \exp(i\nu t) d\nu. \quad (1.18)$$

onde $B_{nm\nu}(\beta)$ são constantes originadas das diversas constantes $a'_0(\beta)$, $a'_1(\beta)$, $a'_2(\beta)$, $a'_3(\beta)$ e $b'_3(\beta)$ presentes nas expressões (1.14), (1.15), (1.16) e (1.17).

Como a expressão (1.8) é uma condição de contorno semi-linear, devida a intenção de ser a superfície de um corpo negro não-perfeito, deve-se reescrever a solução, equação (1.18), na forma como se segue

$$u(r, \theta, \phi, t, \beta) = u_0(\beta) + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{nm\nu}(\beta) j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_p}{k} \right)^{1/2} r \right] \cdot P_{nm}(\cos \theta) \exp(im\phi) \exp(i\nu t) d\nu, \quad (1.19)$$

onde as constantes $A_{nm\nu}(\beta)$ para valores de n , m e ν diferentes de $(0, 0, 0)$ assumem os mesmos valores das anteriores constantes $B_{nm\nu}(\beta)$, entretanto a constante $A_{000}(\beta)$ deve ser nula e $u_0(\beta)$ é uma constante que no problema físico é a representação da temperatura média que o corpo material apresenta. Esta representação para a distribuição de temperatura é escolhida com o intuito de obter-se uma solução linearizada do problema diferencial semi-linear de difusão de calor equações (1.7) e (1.8).

Considerando-se por hipótese que $u_0(\beta) \gg |u(r, \theta, \phi, t, \beta) - u_0(\beta)|$ seja válida, que é o processo de linearização da condição de contorno semi-linear da superfície do corpo negro não-perfeito, equação (1.7), e substituindo-se a solução, equação (1.19), na condição de contorno semi-linear de irradiação de um corpo negro não-perfeito, equação (1.8), tem-se

$$k \sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{n'm'\nu'}(\beta) j_{n'\nu'} \left[\left(-i\nu' \frac{\rho C_p}{k} \right)^{1/2} R \right] P_{n'm'}(\cos \theta) \exp(im'\phi) \cdot \\ \cdot \exp(i\nu't) d\nu' = \alpha_a I(R, \theta, \phi, t, \beta) - \epsilon \sigma u_0^4(\beta) - 4\epsilon \sigma u_0^3(\beta) \sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{n'm'\nu'}(\beta) \cdot \\ \cdot j_{n'\nu'} \left[\left(-i\nu' \frac{\rho C_p}{k} \right)^{1/2} R \right] P_{n'm'}(\cos \theta) \exp(im'\phi) \exp(i\nu't) d\nu' - o(2). \quad (1.20)$$

Multiplicando a expressão polinomial equação (1.20) pela auto-função complexo conjugada da equação diferencial parcial (1.7), que é $P_{nm}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \exp(-i\nu t)$, pela expressão diferencial $\sin \theta d\theta d\phi dt$ e integrando sobre todo o domínio das variáveis independentes θ , ϕ e t , obtém-se a expressão

$$k \sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{n'm'\nu'}(\beta) \frac{d}{dr} j_{n'\nu'} \left[\left(-i\nu' \frac{\rho C_p}{k} \right)^{1/2} R \right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{nm}(\cos \theta) \cdot \\ \cdot P_{n'm'}(\cos \theta) \exp(-i(m - m')\phi) \exp(-i(\nu - \nu')t) \sin \theta d\theta d\phi dt d\nu' =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_a I(R, \theta, \phi, t, \beta) P_{nm}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \exp(-i\nu t) \sin \theta d\theta d\phi dt - \\
 &- \epsilon \sigma u_0^4(\beta) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{nm}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \exp(-i\nu t) \sin \theta d\theta d\phi dt - 4\epsilon \sigma u_0^3(\beta) \cdot \\
 &\cdot \sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{n'm'\nu'}(\beta) j_{n'\nu'} [(-i\nu' \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{nm}(\cos \theta) \cdot \\
 &\cdot P_{n'm'}(\cos \theta) \exp(-i(m-m')\phi) \exp(-i(\nu-\nu')t) \sin \theta d\theta d\phi dt d\nu'. \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

Mas tem-se da teoria de representações por funções ortonormais a relação de ortonormalização (Abramowitz, 1965)

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{nm}(\cos \theta) P_{n'm'}(\cos \theta) \exp(-i(m-m')\phi) \exp(-i(\nu-\nu')t) \sin \theta d\theta d\phi dt = \\
 &= \frac{8\pi^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta(\nu-\nu'), \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

onde $\delta_{nn'}$ e $\delta(\nu-\nu')$ são respectivamente as funções de delta de Kroenecker e delta de Dirac, cujas propriedades que aqui são úteis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \delta_{nn'} = f_{n'}, \quad (1.23)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) \delta(\nu-\nu') = f(\nu'), \quad (1.24)$$

transforma a expressão (1.21) em

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{n'm'\nu'}(\beta) k \frac{d}{dr} j_{n'\nu'} [(-i\nu' \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R] \frac{8\pi^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \\
 &\cdot \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta(\nu-\nu') + \sum_{n'=0}^{+\infty} \sum_{m'=-n'}^{+n'} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{n'm'\nu'}(\beta) 4\epsilon \sigma u_0^3(\beta) j_{n'\nu'} [(-i\nu' \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R] \cdot \\
 &\cdot \frac{8\pi^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta(\nu-\nu') = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha_a I(R, \theta, \phi, t, \beta) - \epsilon \sigma u_0^4(\beta)] \cdot \\
 &\cdot P_{nm}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \exp(-i\nu t) \sin \theta d\theta d\phi dt. \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

Isolando as constantes $A_{nm\nu}(\beta)$ que estão presentes implicitamente na equação (1.25), obtêm-se

$$A_{nm\nu}(\beta) = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_a I(R, \theta, \phi, t, \beta) P_{nm}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \exp(-i\nu t) \sin \theta d\theta d\phi dt}{\frac{8\pi^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} j_{n\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R] [k \frac{d}{dr} L_n j_{n\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R] + 4\epsilon \sigma u_0^3]} - \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon \sigma u_0^4(\beta) P_{nm}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \exp(-i\nu t) \sin \theta d\theta d\phi dt}{\frac{8\pi^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} j_{n\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R] [k \frac{d}{dr} L_n j_{n\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R] + 4\epsilon \sigma u_0^3]}, \quad (1.26)$$

que para valores (n, m, ν) diferentes de $(0, 0, 0)$ a expressão (1.26) reduz-se à

$$\frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_a I(R, \theta, \phi, t, \beta) P_{nm}(\cos \theta) \exp(-im\phi) \exp(-i\nu t) \sin \theta d\theta d\phi dt}{\frac{8\pi^2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} j_{n\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R] [k \frac{d}{dr} L_n j_{n\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_p}{k})^{1/2} R] + 4\epsilon \sigma u_0^3]}. \quad (1.27)$$

E a determinação do valor $u_0(\beta)$, que fisicamente representa a temperatura termodinâmica média do corpo considerado, que deve ser obviamente dependente da função distribuição superficial de taxa de energia eletromagnética incidente, vem do conhecimento anterior de que $A_{000}(\beta) = 0$, ou seja, resolver a expressão integral a seguir

$$8\pi^2 \epsilon \sigma u_0^4(\beta) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_a I(R, \theta, \phi, t, \beta) P_{00}(\cos \theta) \exp(-i0\phi) \exp(-i0t) \sin \theta d\theta d\phi dt. \quad (1.28)$$

Portanto, substituindo as expressões (1.27) e (1.28) na expressão (1.9), tem-se a solução linearizada do problema diferencial semi-linear de difusão de calor, equações (1.7) e (1.8).

1.4. Taxa de Momentum Linear Transferido por Corpos Negros não-Perfeitos

Se o corpo esférico de raio R , aqui considerado, for um corpo pertencente a classe dos corpos negros não-perfeitos, então a função $I(\nu, \beta, t)$ estará relacionada com a distribuição superficial de temperatura termodinâmica $u(\theta, \phi, \beta, t)$ que o corpo esférico apresenta, pela relação a seguir

$$I(\nu, \theta, \phi, \beta, t) = \epsilon \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{ku(\theta, \phi, \beta, t)}\right) - 1}, \quad (1.29)$$

onde ϵ é o índice de emissividade da superfície do corpo negro não-perfeito, que aqui será suposto constante; h é a constante fundamental de Planck; k é a constante fundamental de Boltzmann.

Então o vetor taxa de momentum linear $\vec{F}_t(\beta, t)$ transferida do interior para o exterior do corpo negro não-perfeito de forma superficial esférica, devida à uma distribuição superficial de temperatura termodinâmica $u(\theta, \phi, \beta, t)$ que o dado corpo apresenta, é obtida pela soma de todas as contribuições em todas as frequências das ondas eletromagnéticas pela qual o corpo emite quantidades de energia, onde as frequência variam entre os valores nulo e o fisicamente infinito

$$\begin{aligned} \vec{F}_t(\beta, t) = & -\frac{2}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \epsilon \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{ku(\theta, \phi, \beta, t)}\right) - 1} (\text{sen}\theta \cos\phi \hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\theta \sin\phi \hat{\mathbf{j}} + \\ & + \cos\theta \hat{\mathbf{k}}) R^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (1.30)$$

resolvendo-se a integração nas frequências, temos

$$\vec{F}_t(\beta, t) = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon \sigma}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u^4(\theta, \phi, \beta, t) (\text{sen}\theta \cos\phi \hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\theta \sin\phi \hat{\mathbf{j}} + \cos\theta \hat{\mathbf{k}}) R^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi, \quad (1.31)$$

onde σ é a constante fundamental de Stefan-Boltzmann.

A distribuição superficial de temperatura termodinâmica $u(\theta, \phi, t, \beta)$ que a superfície do corpo negro não-perfeito apresenta pode ser escrita sob a forma apresentada

na equação (1.19), então substituindo-a na expressão do vetor taxa total de momentum linear $\vec{F}_t(\beta, t)$ transferido do interior para o exterior do corpo negro não-perfeito de forma superficial esférica e levando em conta o anterior procedimento de linearização, tem-se

$$\begin{aligned} \vec{F}_t(\beta, t) = & -\frac{2}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0^4(\beta) (\text{sen}\theta \cos\phi \hat{i} + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}) R^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi - \\ & -\frac{8}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{nm\nu}(\beta) j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_P}{k} \right)^{1/2} R \right] P_{nm}(\cos\theta) \cdot \\ & \cdot \exp(im\phi) \exp(i\nu t) (\text{sen}\theta \cos\phi \hat{i} + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}) R^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi d\nu. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Resolvendo as integrações nas variáveis θ e ϕ , obtém-se

$$\begin{aligned} \vec{F}_t(\beta, t) = & -\frac{32}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^2 u_0^3(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} j_{1\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_P}{k} \right)^{1/2} R \right] \cdot \\ & \cdot (A_{11\nu}(\beta)(\hat{i} + i\hat{j}) + A_{10\nu}(\beta)\hat{k}) \exp(i\nu t) d\nu. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Observe-se que fisicamente o vetor taxa total de momentum linear deve ter uma representação real, portanto

$$\begin{aligned} \Re \vec{F}_t(\beta, t) = & -\frac{32}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^2 u_0^3(\beta) \Re \int_{-\infty}^{+\infty} j_{1\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_P}{k} \right)^{1/2} R \right] \cdot \\ & \cdot (A_{11\nu}(\beta)(\hat{i} + i\hat{j}) + A_{10\nu}(\beta)\hat{k}) \exp(i\nu t) d\nu, \end{aligned} \quad (1.34)$$

onde as constantes $u_0(\beta)$, $A_{11\nu}(\beta)$ e $A_{10\nu}(\beta)$ são expressas pelas equações (1.28) e (1.27).

1.5. Aplicações do Modelo para Fontes de Radiações Eletromagnéticas Pontuais

Suponha que o corpo material fonte de radiações eletromagnéticas apresente-se para um observador situado em algum ponto da superfície do corpo material orbitante como um ponto singular a uma distância fisicamente infinita situada na posição angular aparente (θ^*, ϕ^*) no sistema de coordenadas polares esféricas associado ao centro geométrico do corpo material orbitante, a expressão do vetor taxa de momentum linear $\vec{F}_t(\beta, t)$ é dada pela equação (1.34), onde as constantes $A_{nm\nu}(\beta)$ e $u_0(\beta)$ são obtidas pela integração de uma distribuição superficial de taxa de energia oriunda da absorção de quantidades de energia transportadas por frações das ondas eletromagnéticas incidentes à superfície do corpo, cuja representação para uma fonte de radiações eletromagnéticas situada a uma distância fisicamente infinita, em um sistema de coordenadas polares esféricas associado ao centro geométrico do corpo orbitante, é dada pela expressão (Jackson, 1983)

$$\begin{cases} \alpha_a I_0(\beta, t) [\cos\theta \cos\theta^* + \sin\theta \sin\theta^* \cos(\phi - \phi^*)] & \text{se } [...] \geq 0; \\ 0 & \text{se } [...] < 0; \end{cases} \quad (1.35)$$

onde $I_0(\beta, t)$ é o valor da taxa de energia eletromagnética que incide na posição superficial (θ^*, ϕ^*) , função do parâmetro temporal t e de um conjunto, aqui arbitrário, de parâmetros físicos β , e os valores θ^* e ϕ^* , onde o par ordenado (θ^*, ϕ^*) dá a direção da posição aparente do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, são também funções do parâmetro temporal t e de um conjunto, aqui arbitrário, de parâmetros físicos β .

Exemplo: Efeito Yarkovsky

Particularizando ainda mais, suponha que o corpo material orbitante assuma em sua translação em torno do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, uma órbita circular e que os vetores momentum angular de rotação intrínseca e de translação orbital sejam colineares, então a expressão representação da distribuição superficial de taxa de energia eletromagnética absorvida, expressada (1.35), reduz-se a

$$\begin{cases} \alpha_a I_0(\beta) \sin\theta \cos(\phi - \omega t - \phi_0) & \text{se } \omega t - \phi_0 - \pi/2 \leq \phi \leq \omega t - \phi_0 + \pi/2; \\ 0 & \text{nos outros casos,} \end{cases} \quad (1.36)$$

onde ω é o módulo da velocidade angular de rotação do corpo orbitante.

Substituindo a expressão (1.36) na expressão que relaciona a temperatura termodinâmica média do corpo com a taxa de energia eletromagnética incidente, equação (1.36), obtem-se

$$8\pi^2\epsilon\sigma u_0^4(\beta) = \int_0^\pi \int_{\omega t - \phi_0 - \pi/2}^{\omega t - \phi_0 + \pi/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_a I_0(\beta) \sin\theta \cos(\phi - \omega t + \phi_0) \cdot \\ \cdot P_{00}(\cos\theta) \exp(-i0\phi) \exp(-i0t) \sin\theta d\theta d\phi dt \quad (1.37)$$

e resolvendo-se sucessivamente as diversas integrações, obtem-se a expressão

$$u_0^4(\beta) = \frac{\alpha_a I_0(\beta)}{4\epsilon\sigma}. \quad (1.38)$$

Substituindo-se a expressão (1.36) na expressão para as constantes $A_{nm\nu}(\beta)$, equação (1.27), e particularizando da miríade de constantes para as que envolvem somente $n = 1$ e $m = 1$ tem-se

$$A_{11\nu}(\beta) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \int_{\omega t - \phi_0 - \pi/2}^{\omega t - \phi_0 + \pi/2} \alpha_a I_0(\beta) \sin\theta \cos(\phi - \omega t - \phi_0) P_{11}(\cos\theta) \cdot \right. \\ \cdot \exp(-i\phi) \exp(-i\nu t) \sin\theta d\theta d\phi dt \left. \left[\frac{16\pi^2}{3} j_{1\nu} \left[(-i\nu \frac{\rho C_P}{k})^{1/2} R \right] \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left[k \frac{d}{dR} \text{Ln} j_{1\nu} \left[(-i\nu \frac{\rho C_P}{k})^{1/2} R \right] + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta) \right] \right]^{-1}, \quad (1.39)$$

e obtem-se como resultado a expressão

$$A_{11\nu}(\beta) = \frac{\alpha_a I_0(\beta)}{4} \frac{\delta(\nu + \omega) \exp(i\phi_0)}{j_{1\nu} \left[(-i\nu \frac{\rho C_P}{k})^{1/2} R \right] \left[k \frac{d}{dR} \text{Ln} j_{1\nu} \left[(-i\nu \frac{\rho C_P}{k})^{1/2} R \right] + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta) \right]}. \quad (1.40)$$

Entretanto quando calcula-se os valores de $A_{10\nu}(\beta)$,

$$A_{10\nu}(\beta) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \int_{\omega t - \phi_0 - \pi/2}^{\omega t - \phi_0 + \pi/2} \alpha_a I_0(\beta) \sin\theta \cos(\phi - \omega t - \phi_0) P_{10}(\cos\theta) \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp(-i0\phi) \exp(-i\nu t) \sin\theta d\theta d\phi dt \right] \left[\frac{16\pi^2}{3} j_{1\nu} \left[(-i\nu \frac{\rho_{CP}}{k})^{1/2} R \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[k \frac{d}{dR} \text{Ln} j_{1\nu} \left[(-i\nu \frac{\rho_{CP}}{k})^{1/2} R \right] + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta) \right] \right]^{-1}, \quad (1.41)$$

obtem-se valores nulos para todo e qualquer valor de ν .

Então pode-se escrever o vetor complexo taxa de momentum linear $\vec{F}(\beta, t)$ como sendo a expressão

$$\vec{F}_t(\beta, t) = -\frac{8}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^2 u_0^3(\beta) \frac{(\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_0) \alpha_a I_0(\beta)}{\left[k \frac{d}{dR} \text{Ln} j_{1-\omega} \left[(+i\omega \frac{\rho_{CP}}{k})^{1/2} R \right] + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta) \right]}. \quad (1.42)$$

Assumindo que $\exp(x + iy)$ seja uma expressão representação do inverso do denominador presente na expressão (1.42), isto é,

$$\exp(x + iy) = \frac{1}{\left[k \frac{d}{dR} \text{Ln} j_{1-\omega} \left[(+i\omega \frac{\rho_{CP}}{k})^{1/2} R \right] + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta) \right]}, \quad (1.43)$$

obtem-se o vetor complexo taxa de momentum linear $\vec{F}_t(\beta, t)$ devida à emissão térmica de energia sob forma de ondas eletromagnéticas, como sendo a expressão

$$\vec{F}_t(\beta, t) = -\frac{8}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^2 u_0^3(\beta) \exp(x) (\hat{i} + i\hat{j}) \exp(-i\omega t + i\phi_0 + iy), \quad (1.44)$$

cuja representação no domínio dos reais é

$$\Re \vec{F}_t(\beta, t) = -\frac{8}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^2 u_0^3(\beta) \exp(x) [\cos(\omega t - \phi_0 - y) \hat{i} + \sin(\omega t - \phi_0 - y) \hat{j}], \quad (1.45)$$

onde os valores de x e y são dados à partir do conhecimento da expressão (1.43), isto é,

$$x = -\Re \operatorname{Ln} \left[k \frac{d}{dR} \operatorname{Ln} j_{1-\omega} \left[\left(+i\omega \frac{\rho_{CP}}{k} \right)^{1/2} R \right] + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta) \right], \quad (1.46)$$

$$y = -\Im \operatorname{Ln} \left[k \frac{d}{dR} \operatorname{Ln} j_{1-\omega} \left[\left(+i\omega \frac{\rho_{CP}}{k} \right)^{1/2} R \right] + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta) \right], \quad (1.47)$$

e $u_0(\beta)$, que fisicamente representa a temperatura média que o corpo material esférico apresenta, é dada neste caso particular pela expressão (1.38).

Observe que fisicamente o recíproco do valor do ângulo y , presente na expressão da representação real do vetor taxa de momentum linear $\vec{F}_t(\beta, t)$, equação (1.45), expressa pela equação (1.47), deve assumir valores, em unidades de radianos, entre 0 e $\pi/2$, pois do contrário ocorreria de que o máximo valor de temperatura termodinâmica para um elemento de área da superfície do corpo, ocorreria somente, para valores negativos, antes que o corpo fonte de radiações apresentar-se no zenite, ou, para valores maiores do que $\pi/2$, somente após que o corpo fonte de radiações não mais fosse visível para um observador na superfície do corpo material orbitante, isto é, após o anoitecer.

Exemplo Efeito Inverno-Verão

Outra particularização possível, é a de que o corpo fonte emissor de radiações eletromagnéticas permanece estatico em uma posição aparente sobre o prolongamento do vetor momentum angular intrínseco de rotação do corpo orbitante, então a expressão de θ^* assume o valor nulo e a expressão (1.35) reduzir-se-á a

$$\begin{cases} \alpha_a I_0(\beta) \cos \theta & \text{se } 0 \leq \theta \leq \pi/2; \\ 0 & \text{se } \pi/2 < \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (1.48)$$

e seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior, substituindo a expressão (1.48) na expressão da temperatura termodinâmica média, equação (1.28), obtem-se a relação

$$8\pi^2 \epsilon \sigma u_0^4(\beta) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_a I_0(\beta) \cos \theta P_{00}(\cos \theta) \exp(-i\Omega t) \sin \theta d\theta d\phi dt, \quad (1.49)$$

o que resulta em

$$u_0^4(\beta) = \frac{\alpha_a I_0(\beta)}{4\epsilon\sigma}. \quad (1.50)$$

Calculando as constantes $A_{10\nu}(\beta)$,

$$A_{10\nu}(\beta) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \alpha_a I_0(\beta) \cos\theta P_{10}(\cos\theta) \exp(-i\phi) \exp(-i\nu t) \sin\theta d\theta d\phi dt}{\frac{8\pi^2}{3} j_{1\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_P}{k})^{1/2} R] [k \frac{d}{dR} \text{Ln} j_{1\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_P}{k})^{1/2} R] + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta)]}, \quad (1.51)$$

resolvendo a expressão (1.51) em todas as variáveis de integração obtém-se a expressão abaixo

$$A_{10\nu}(\beta) = \frac{\alpha_a I_0(\beta)}{2} \frac{\delta(\nu - 0)}{R [\frac{k}{R} + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta)]}, \quad (1.52)$$

Entretanto quando calcula-se as constantes $A_{11\nu}(\beta)$,

$$A_{11\nu}(\beta) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \alpha_a I_0(\beta) \cos\theta P_{11}(\cos\theta) \exp(-i\phi) \exp(-i\nu t) \sin\theta d\theta d\phi dt}{\frac{8\pi^2}{3} j_{1\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_P}{k})^{1/2} R] [k \frac{d}{dR} \text{Ln} j_{1\nu} [(-i\nu \frac{\rho C_P}{k})^{1/2} R] + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta)]}, \quad (1.53)$$

obtem-se valores nulos para qualquer valor de ν .

E finalmente obtém-se a expressão para o máximo valor do efeito conhecido como efeito Inverno-Verão, que é a expressão

$$\vec{F}_t(\beta, t) = -\frac{16}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^2 u_0^3(\beta) \frac{\alpha_a I_0(\beta) \hat{k}}{[\frac{k}{R} + 4\epsilon\sigma u_0^3(\beta)]}, \quad (1.54)$$

onde $u_0(\beta)$ é a temperatura média que o corpo material orbitante apresenta dada pela expressão (1.50), o que concorda com o trabalho de Afonso et al., 1989.

Este último caso particular, também poderia ser obtido através da resolução da equação de Laplace de difusão de calor independente do tempo (Afonso e Barlier, comunicação pessoal), pois não existem parâmetros temporais característicos explícitos na expressão particular da taxa de energia eletromagnética incidente à superfície do corpo material orbitante equação (1.48).

Capítulo Segundo

Tratamento Relativístico Restrito para Forças de Radiações

Da taxa total de radiações sob forma de ondas eletromagnéticas que incidem sobre um dado elemento de área da superfície do corpo orbitante, uma fração será totalmente absorvida, o que acarretará, também, a total a transferência das respectivas frações de quantidades de momentum linear e de quantidades de energia transportadas pelas ondas eletromagnéticas incidentes, e por ser totalmente opaco a fração restante à completar a unidade sofrerá espalhamento reflexivo, o que acarretará somente a transferência de quantidades, relacionadas com as respectivas quantidades incidentes, de momentum linear, e nenhuma permuta de quantidades de energia das quantidades incidentes, para o corpo orbitante. Restringir-se-á, então, sem perdas conceituais, à no máximo dois modelos de espalhamento reflexivo de radiações eletromagnéticas que incidem sobre a superfície do corpo orbitante.

O primeiro modelo de espalhamento, dos dois que serão aqui considerados, é o modelo de *espalhamento reflexivo especular*, em que a respectiva fração de ondas eletromagnéticas incidentes serão reflexivamente espalhadas pelo elemento de área da superfície do corpo orbitante em uma direção que é coplanar à direção da reta normal ao centro geométrico do dado elemento de área da superfície do corpo e a direção de incidência da

respectiva onda eletromagnética que será espalhada, outra característica do espalhamento reflexivo especular é o de que os ângulos formados entre a direção da reta normal ao centro geométrico do elemento de área e as direções de incidência e de espalhamento reflexivo, das radiações eletromagnéticas, são idênticos, assim somente ocorrerá a permuta de quantidades relacionadas com a componente normal, em relação ao elemento de área, do vetor momentum linear e nenhuma permuta de quantidades de energia, respectivamente associadas, transportadas pelas radiações eletromagnéticas.

O segundo modelo de espalhamento, dos dois que aqui serão considerados, é o modelo de *espalhamento reflexivo difuso*, na qual toda as quantidades de energia sob forma de radiações eletromagnéticas que incidem sobre o elemento de área da superfície do corpo orbitante serão refletidas em quantidades de idênticas proporções em todas as direções exteriores ao corpo orbitante, o que também acarretará somente a permuta de quantidades de momentum linear relacionadas com as quantidades incidentes.

2.1. *Forças de Radiações Eletromagnéticas Incidentes*

Considere um elemento de área da superfície de um corpo material orbitante cuja forma superficial seja convexa, então associa-se de maneira bem conveniente um sistema de referência, onde uma determinada propriedade ou mesmo algum determinado ente geométrico φ seja representada por símbolos sobreindicados φ^o , que se desloca com vetor velocidade \vec{v}' em relação a um segundo sistema de referência, onde a relacionada propriedade ou algum determinado ente geométrico é representada por símbolos não-sobreindicados φ , que está associado ao centro geométrico do dado corpo.

Com isto pode-se relacionar os valores observados de determinadas propriedades físicas e de entes geométricos diversos em ambos os sistemas de referência, entre as de interesse (Guess, 1962)

a . transformação de Lorentz do vetor cosseno diretor

$$\vec{l}^0 = \vec{l} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + (\vec{l} \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})}, \quad (2.1)$$

b . transformação de Lorentz da taxa de energia eletromagnética

$$I^0(\nu) = I(\nu) \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{3/2}}, \quad (2.2)$$

c . transformação de Lorentz para frequências de ondas eletromagnéticas

$$d\nu^0 = d\nu \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})}, \quad (2.3)$$

d . transformação de Lorentz para ângulos sólidos

$$d\omega^0 = d\omega \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})^2}, \quad (2.4)$$

onde v é o módulo do vetor velocidade relativa entre os dois sistemas de referência considerados, \vec{v}' é o vetor velocidade relativa entre os dois sistemas de referência e c é o módulo da velocidade da luz no vácuo.

Considere um elemento de área da superfície de um determinado corpo, como definido na secção 1.1. Seja $I^0(\nu, \beta', \theta', \phi', t) d\nu^0 dA(\beta', t)$ a taxa de energia eletromagnética incidente à um elemento de área $dA(\beta', t)$, do exterior do dado corpo, para um observador solidário ao sistema de referência conectado com o centro de massa do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, transportada por meio de ondas eletromagnéticas com frequências entre ν e $\nu + d\nu$, oriundas de direções entre θ' e $\theta' + d\theta'$ e entre ϕ' e $\phi' + d\phi'$, função do parâmetro temporal t e de um conjunto, aqui arbitrário, de parâmetros

físicos β' . Então, uma fração do vetor taxa elementar de momentum linear, para um observador solidário ao sistema de referência conectado ao centro de massa do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, induzido sobre o elemento de área, da superfície do corpo, por meio de absorção de quantidades elementares de momentum linear transportadas por ondas eletromagnéticas incidentes é dada pela expressão

$$-\frac{\alpha_a}{c} I^o(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu^o dA(\beta', t) (\text{sen}\theta' \cos\phi' \hat{\mathbf{i}}' + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \hat{\mathbf{j}}' + \cos\theta' \hat{\mathbf{k}}')^o (\text{sen}\theta' d\theta' d\phi')^o. \quad (2.5)$$

Uma segunda fração do vetor taxa elementar de momentum linear induzido sobre o elemento de área $dA(\beta', t)$, da superfície do corpo, por meio de espalhamento reflexivo especular de quantidades elementares de momentum linear transportadas por ondas eletromagnéticas incidentes é dada pela expressão

$$-\frac{\alpha_e}{c} I^o(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu^o dA(\beta', t) (2\cos\theta' \hat{\mathbf{k}}')^o (\text{sen}\theta' d\theta' d\phi')^o. \quad (2.6)$$

A fração restante do vetor taxa elementar de momentum linear induzido sobre o elemento de área $dA(\beta', t)$, da superfície do corpo, por meio de espalhamento reflexivo difuso de quantidades elementares de momentum linear transferidas por ondas eletromagnéticas incidentes é dada pela expressão

$$-\frac{\alpha_d}{c} I^o(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu^o dA(\beta', t) [\text{sen}\theta' \cos\phi' \hat{\mathbf{i}}' + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \hat{\mathbf{j}}' + (\cos\theta' + \pi) \hat{\mathbf{k}}']^o (\text{sen}\theta' d\theta' d\phi')^o, \quad (2.7)$$

onde α_a , α_e e α_d são, respectivamente, índice de absorvidade, índice de espalhamento reflexivo especular e índice de espalhamento reflexivo difuso da superfície do corpo para ondas eletromagnéticas que serão supostos constantes.

Contudo a relacionada fração do vetor taxa elementar de momentum linear, para um observador solidário ao sistema de referência conectado ao centro de massa do elemento de área do corpo material orbitante, induzido sobre o elemento de área da superfície do corpo, por meio de absorção de quantidades elementares de momentum linear transportadas através de ondas eletromagnéticas incidentes é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_a}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} [\vec{l}' \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} + \\
 & + (\vec{l}' \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})}] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi'. \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

onde \vec{l}' é dado pela expressão $\text{sen} \theta' \cos \phi' \hat{i}' + \text{sen} \theta' \text{sen} \phi' \hat{j}' + \cos \theta' \hat{k}'$. A relacionada segunda fração do vetor taxa elementar de momentum linear é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_e}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} [\vec{l}' \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} + \\
 & + (\vec{l}' \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} - \vec{l}' + \hat{k}' (\hat{k}' \cdot \vec{l}')] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi'. \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

A relacionada fração restante do vetor taxa elementar de momentum linear é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_d}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} [\vec{l}' \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} + \\
 & + (\vec{l}' \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} + \pi \vec{k}'] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi'. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Então para obter-se, à partir das contribuições elementares expressões equações (2.8), (2.9) e (2.10), o vetor taxa elementar de momentum linear $\vec{F}_i(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t)$, para um observador solidário a um sistema de referência conectado com o centro de massa do elemento de área da superfície do corpo material orbitante, induzido sobre o elemento de área da superfície do corpo, por meio de permutas de quantidades elementares de momentum linear transportadas através de ondas eletromagnéticas, dever-se-á somar todas as contribuições em todas as possíveis direções angulares (θ', ϕ') , onde a coordenada angular colatitudinal θ' varia, em unidades de radianos, entre os valores 0 e $\pi/2$ e a coordenada angular azimutal ϕ' varia, em unidades de radianos, entre os valores 0 e 2π , o que resulta na expressão

$$\begin{aligned}
\vec{F}_i(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) = & - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_a}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \\
& \cdot \left[\vec{l} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + (\vec{l} \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + \vec{l} \right] \sin \theta' d\theta' d\phi' - \\
& - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_e}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \cdot \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \left[\vec{l} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + \right. \\
& \left. + (\vec{l} \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} - \vec{l} + \hat{k}'(\hat{k}' \cdot \vec{l}) \right] \sin \theta' d\theta' d\phi' - \\
& - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_d}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \left[\vec{l} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + \right. \\
& \left. + (\vec{l} \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + \pi \vec{k}' \right] \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Então supondo-se que o módulo do vetor velocidade relativa $\|\vec{v}'\|$, entre os sistemas de referência solidários ao centro geométrico do elemento de área e ao centro de massa do corpo material orbitante, assume valores fisicamente pequenos quando comparados com o valor do módulo da velocidade da luz no vácuo c , pode-se reescrever a expressão equação (2.11) como

$$\begin{aligned} \vec{F}_i(\nu, \beta, t) d\nu dA(\beta', t) = & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} \right] \cdot \\ & \cdot \sin\theta' d\theta' d\phi' - \frac{\alpha_e}{c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) [\hat{k}'(\hat{k}' \cdot \vec{l}) - \\ & - 5\vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c}] \sin\theta' d\theta' d\phi' - \frac{\alpha_d}{c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \cdot \\ & \cdot \left[\vec{l} - 3\vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} + \pi \vec{k}' - 2\pi \vec{k}' \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c} \right) \right] \sin\theta' d\theta' d\phi'. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2. Forças de Radiações Eletromagnéticas Termo-Emitidas

Considere como corpo dado de forma superficial suavemente convexa, um corpo esférico como o definido na secção 1.2. Então pode-se escrever para um observador solidário ao sistema de referência conectado ao centro geométrico do elemento de área da superfície do corpo, o vetor taxa de momentum linear $\vec{F}_i(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t)$, equação (1.4), transferido pelo elemento de área $R^2 \sin\theta d\theta d\phi$, cuja direcção é a da normal ao elemento de área, e com sentido do interior para o exterior do corpo, que para um observador solidário ao sistema de referência conectado ao elemento de área é \vec{l}^0 , através de ondas eletromagnéticas, como sendo

$$\vec{F}_i^0(\nu, \beta, t, \theta, \phi) d\nu^\circ dA(\beta', t) = -\frac{2}{3c} I^\circ(\nu, \beta', t) d\nu \vec{l}^0 R^2 (\sin\theta d\theta d\phi)^\circ. \quad (2.13)$$

Entretanto para um observador solidário ao sistema de referência conectado com o centro geométrico do corpo material orbitante esférico, o vetor taxa elementar de momentum linear $\vec{F}_t(\nu, \beta, t, \theta, \phi) d\nu dA(\beta', t)$ transferido pelo elemento de área do interior para o exterior, por meio de emissão de quantidades de momentum linear transportados por ondas eletromagnéticas, é obtido à partir da expressão (2.13) com o uso das transformações de Lorentz apresentadas nas expressões equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4), isto é,

$$\begin{aligned} \vec{F}_t(\nu, \beta, t, \theta, \phi) d\nu dA(\beta', t) = & -\frac{2}{3c} I(\nu, \beta', t) d\nu \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2})} \left[\vec{l} \frac{(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c})} + \right. \\ & \left. + (\vec{l} \cdot \frac{\vec{v}}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c})} \frac{\vec{v}}{v} - \frac{\frac{\vec{v}}{c}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c})} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde \vec{v} é o vetor velocidade relativa entre os sistemas de referência solidários ao elemento de área da superfície e ao centro geométrico do corpo orbitante.

Supondo-se que o módulo do vetor velocidade relativa $\|\vec{v}\|$, entre os sistemas de referência solidários, respectivamente, ao centro geométrico do elemento de área e ao centro de massa do corpo material orbitante, assume valores fisicamente pequenos quando comparados com o valor do módulo da velocidade da luz no vácuo c , pode-se reescrever a expressão (2.14) como sendo

$$\vec{F}_t(\nu, \beta, t, \theta, \phi) d\nu dA(\beta', t) = -\frac{2}{3c} I(\nu, \beta', t) d\nu \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \quad (2.15)$$

Então, o vetor taxa elementar de momentum linear $\vec{F}_t(\nu, \beta, t) d\nu$, é dado pela soma de todas as contribuições em todas as possíveis direções, onde a coordenada angular colatitudinal θ varia, em unidades de radianos, entre 0 e π e a coordenada angular azimutal ϕ varia, em unidades de radianos, entre os valores 0 e 2π

$$\vec{F}_t(\nu, \beta, t) d\nu = -\frac{2}{3c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I(\nu, \theta, \phi, \beta, t) d\nu \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \quad (2.16)$$

Entretanto se o corpo esférico de raio R , aqui considerado, for um corpo pertencente a classe dos corpos negros não-perfeitos, onde a função $I(\nu, \beta, t)$ estará relacionada com a distribuição superficial de temperatura termodinâmica $u(\theta, \phi, \beta, t)$, pela relação equação (1.7). Então o vetor taxa de momentum linear $\vec{F}_t(\beta, t)$ devida à uma distribuição superficial de temperatura termodinâmica $u(\theta, \phi, \beta, t)$ que o dado corpo apresenta, é obtida pela soma de todas as contribuições em todas as frequências das ondas eletromagnéticas pela qual o corpo emite quantidades de energia, onde as frequência variam entre os valores nulo e o fisicamente infinito

$$\vec{F}_t(\beta, t) = -\frac{2}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\epsilon \nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{ku(\theta, \phi, \beta, t)}\right) - 1} \left[\vec{I} - \vec{I} \left(\frac{\vec{I} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.17)$$

resolvendo-se a integração da expressão nas frequências, tem-se

$$\vec{F}_t(\beta, t) = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon \sigma}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u^4(\theta, \phi, \beta, t) \left[\vec{I} - \vec{I} \left(\frac{\vec{I} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad (2.18)$$

onde σ é a constante fundamental de Stefan-Boltzmann.

A distribuição superficial de temperatura termodinâmica $u(\theta, \phi, t, \beta)$ que a superfície do corpo negro não-perfeito apresenta pode ser escrita sob a forma apresentada na equação (1.19), então substituindo-a na expressão do vetor taxa de momentum linear $\vec{F}_t(\beta, t)$ e levando em conta o anterior procedimento de linearização, tem-se

$$\begin{aligned} \vec{F}_t(\beta, t) = & -\frac{2}{3} \frac{\epsilon \sigma}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0^4(\beta) \left[\vec{I} - \vec{I} \left(\frac{\vec{I} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\ & -\frac{8}{3} \frac{\epsilon \sigma}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{nm\nu}(\beta) j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_P}{k} \right)^{1/2} R \right] P_{nm}(\cos\theta) \cdot \\ & \cdot \exp(im\phi) \exp(i\nu t) \left[\vec{I} - \vec{I} \left(\frac{\vec{I} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu. \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.3. Aplicações para Fontes de Radiações de Dimensões Pontuais

Incidência de Radiações

Suponha entretanto que o vetor velocidade relativa \vec{v} , presente na expressão do vetor taxa de momentum linear $\vec{F}_i(\beta, t)$ devida a incidência de radiações eletromagnéticas equação (2.12), entre os sistemas de referência conectados ao elemento de área da superfície e ao centro geométrico do corpo material orbitante seja dada pela expressão $-\vec{\omega} \times \vec{x}^r - \dot{\vec{x}}^m$, e então obtem-se a expressão

$$\begin{aligned} \vec{F}_i(\beta, t) = & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu \left[\vec{l} + \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \dot{\vec{x}}^m}{c} \right) + \left(\frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) + \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right] \right. \\ & \cdot \text{sen} \theta' d\theta' d\phi' \Big] R^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi - \frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu \right. \\ & \cdot \left[\vec{k}' (\vec{k}' \cdot \vec{l}) + 5\vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \dot{\vec{x}}^m}{c} \right) + \left(\frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) + \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi' \Big] R^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi - \\ & -\frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu \left[\vec{l} + 3\vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \dot{\vec{x}}^r}{c} \right) + \left(\frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^m}{c} \right) + \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \pi \vec{k}' - 2\pi \vec{k}' \left(\frac{\vec{l} \cdot \dot{\vec{x}}^m}{c} \right) \right] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi' \right] R^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

e integrando-se nas variáveis angulares tem-se a expressão

$$\begin{aligned} \vec{F}_i(\beta, t) = & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + \frac{\alpha_d}{c} \right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \vec{l}^* R^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi d\nu - \\ & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + 5\frac{\alpha_e}{c} + 3\frac{\alpha_d}{c} \right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot [\vec{\omega} \times \vec{x}^r + \dot{\vec{x}}^m]}{c} \right) R^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi d\nu - \\ & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + \frac{\alpha_e}{c} + \frac{\alpha_d}{c} \right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} R^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi d\nu - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + \frac{\alpha_e}{c} + \frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu + \\
 & + \left[\frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \pi \vec{l} R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu + \\
 & + \left[\frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) 2\pi \vec{l} \left(\frac{\vec{l}^* \cdot [\vec{\omega} \times \vec{x}^r + \dot{\vec{x}}^m]}{c} \right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu, \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

onde a expressão da distribuição superficial de taxa de energia $I(\nu, \beta', t)$ sob forma de ondas eletromagnéticas com frequências entre ν e $\nu + d\nu$ incidentes à superfície do corpo material orbitante, função do parâmetro temporal t e de um conjunto, aqui arbitrário, de parâmetros físicos β , é dada pela expressão (1.38).

Entretanto o vetor posição relativa do elemento de área da superfície \vec{x}^r , em relação ao centro de massa do corpo orbitante, é dado pela expressão $R\vec{l}$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_i(\beta, t) = & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + \frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \vec{l}^* R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu - \\
 & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + 5\frac{\alpha_e}{c} + 3\frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot [\vec{\omega} \times R\vec{l} + \dot{\vec{x}}^m]}{c} \right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu - \\
 & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + \frac{\alpha_e}{c} + \frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \frac{\vec{\omega} \times R\vec{l}}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu - \\
 & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + \frac{\alpha_e}{c} + \frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu + \\
 & + \left[\frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \pi \vec{l} R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu + \\
 & + \left[\frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) 2\pi \vec{l} \left(\frac{\vec{l}^* \cdot [\vec{\omega} \times R\vec{l} + \dot{\vec{x}}^m]}{c} \right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

e reordenando os termos tem-se

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_i(\beta, t) = & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + \frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \vec{l}^* R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu - \\
 & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + 5\frac{\alpha_e}{c} + 3\frac{\alpha}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{\omega} \times R\vec{l}}{c}\right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu - \\
 & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + 5\frac{\alpha_e}{c} + 3\frac{\alpha}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \dot{\vec{x}}^m}{c}\right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu - \\
 & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + \frac{\alpha_e}{c} + \frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \frac{\vec{\omega} \times R\vec{l}}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu - \\
 & -\left[\frac{\alpha_a}{c} + \frac{\alpha_e}{c} + \frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu + \\
 & +\left[\frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) \pi \vec{l} R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu + \\
 & +\left[\frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) 2\pi \vec{l} \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{\omega} \times R\vec{l}}{c}\right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu + \\
 & +\left[\frac{\alpha_d}{c}\right] \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) 2\pi \vec{l} \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \dot{\vec{x}}^m}{c}\right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu. \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

onde os primeiro e sexto termos fornecem a pressão de radiações, os terceiro, quinto e oitavo termos fornecem o efeito Poynting-Robertson, os segundo, quarto e sétimo termos fornecem um efeito desconhecido na literatura científica.

Emissão Térmica de Radiações

O vetor velocidade relativa entre os sistemas de referência solidários ao centro de massa do elemento de área e ao centro de massa do corpo material orbitante pode ser

descrita pela expressão $-\vec{\omega} \times R\vec{l}$, então pode-se reescrever a expressão (2.19),

$$\begin{aligned} \vec{F}_t(\beta, t) = & -\frac{2}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0^4(\beta) \left[\vec{l} + \frac{\vec{\omega} \times R\vec{l}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\ & -\frac{8}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{nm\nu}(\beta) j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_P}{k} \right)^{1/2} R \right] \cdot \\ & \cdot P_{nm}(\cos\theta) \exp(im\phi) \exp(i\nu t) \left[\vec{l} + \frac{\vec{\omega} \times R\vec{l}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Resolvendo as integrações nas variáveis angulares θ e ϕ , obtém-se o vetor complexo taxa de momentum linear devida à emissão de energia térmica sob forma de ondas eletromagnéticas

$$\begin{aligned} \vec{F}_t(\beta, t) = & -\frac{32}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^2 u_0^3(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} j_{1\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_P}{k} \right)^{1/2} R \right] (A_{11\nu}(\beta)(\hat{i} + i\hat{j}) + A_{10\nu}(\beta)\hat{k}) \cdot \\ & \cdot \exp(i\nu t) d\nu - \frac{32}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^3 u_0^3(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} j_{1\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_P}{k} \right)^{1/2} R \right] \cdot \\ & \cdot \vec{\omega} \times (A_{11\nu}(\beta)(\hat{i} + i\hat{j}) + A_{10\nu}(\beta)\hat{k}) \exp(i\nu t) d\nu. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Observe-se que fisicamente o vetor taxa total de momentum linear deve ter uma representação real, portanto

$$\begin{aligned} \Re \vec{F}_t(\beta, t) = & -\frac{32}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^2 u_0^3(\beta) \Re \int_{-\infty}^{+\infty} j_{1\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_P}{k} \right)^{1/2} R \right] (A_{11\nu}(\beta)(\hat{i} + i\hat{j}) + A_{10\nu}(\beta)\hat{k}) \cdot \\ & \cdot \exp(i\nu t) d\nu - \frac{32}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c} \pi R^3 u_0^3(\beta) \Re \int_{-\infty}^{+\infty} j_{1\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho C_P}{k} \right)^{1/2} R \right] \cdot \\ & \cdot \vec{\omega} \times (A_{11\nu}(\beta)(\hat{i} + i\hat{j}) + A_{10\nu}(\beta)\hat{k}) \exp(i\nu t) d\nu, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde o primeiro termo fornece, como visto no capítulo anterior, os efeitos devidos à emissão térmica e o segundo termo fornece um efeito desconhecido na literatura científica.

Capítulo Terceiro

Torque Relativístico de Radiações Eletromagnéticas

Permutas de quantidades elementares de momentum linear, com os elementos de área da superfície de um corpo material, ocorrerão sempre que radiações sob forma de ondas eletromagnéticas incidam sobre os mesmos.

Destas permutas de quantidades elementares de momentum linear com cada elemento de área da superfície do corpo material resultará não somente em uma composição de impulsos translacionais, na qual contribuirão sobre o movimento translacional do corpo material orbitante nas circunvizinhanças do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, mas também induzirá uma composição de impulsos rotacionais, na qual influirão na atitude do vetor momentum angular intrínseco de rotação do corpo orbitante.

3.1. Torque de Radiações Eletromagnéticas Incidentes

Considere um elemento de área da superfície de um determinado corpo, como o definido na secção 1.1. Seja $I^\circ(\nu, \beta', \theta', \phi', t) d\nu^\circ dA(\beta', t)$ a taxa elementar de energia eletromagnética incidente à um elemento de área $dA(\beta', t)$, do exterior do dado corpo, para

um observador solidário ao sistema de referência conectado com o centro de massa do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, transportada por meio de ondas eletromagnéticas com frequências entre ν e $\nu + d\nu$, oriundas de direções entre θ' e $\theta' + d\theta'$ e entre ϕ' e $\phi' + d\phi'$, função do parâmetro temporal t e de um conjunto, aqui arbitrário, de parâmetros físicos β' . Então, uma fração do vetor taxa elementar de momentum angular transferido para o elemento de área da superfície do corpo, por meio de absorção de quantidades elementares de momentum linear transportadas por ondas eletromagnéticas incidentes, é dada pela expressão

$$-\frac{\alpha_a}{c} I^\circ(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu^\circ dA(\beta', t) \vec{r}_0(\beta) \times (\text{sen}\theta' \cos\phi' \hat{i}' + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \hat{j}' + \cos\theta' \hat{k}')^\circ (\text{sen}\theta' d\theta' d\phi')^\circ. \quad (3.1)$$

Uma segunda fração do vetor taxa elementar de momentum angular transferido para o elemento de área da superfície do corpo, por meio de espalhamento reflexivo especular de quantidades elementares de momentum linear transportadas por ondas eletromagnéticas incidentes, é dada pela expressão

$$-\frac{\alpha_e}{c} I^\circ(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu^\circ dA(\beta', t) \vec{r}_0(\beta) \times (2\cos\theta' \hat{k}')^\circ (\text{sen}\theta' d\theta' d\phi')^\circ. \quad (3.2)$$

A fração restante do vetor taxa elementar de momentum angular induzido sobre elemento de área, por meio de espalhamento reflexivo difuso de quantidades elementares de momentum linear transferidas por ondas eletromagnéticas incidentes, é dada pela expressão

$$-\frac{\alpha_d}{c} I^\circ(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu^\circ dA(\beta', t) \vec{r}_0(\beta) \times (\text{sen}\theta' \cos\phi' \hat{i}' + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \hat{j}' + (\cos\theta' + \pi) \hat{k}')^\circ (\text{sen}\theta' d\theta' d\phi')^\circ. \quad (3.3)$$

Então, uma fração do vetor taxa elementar de momentum angular induzido por meio de absorção de quantidades elementares de momentum linear transportadas por ondas

eletromagnéticas incidentes, é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_a}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \vec{r}_0(\beta) \times [\vec{l}' \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} + \\
 & + (\vec{l}' \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})}] \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

A segunda fração do vetor taxa elementar de momentum angular induzido por meio de espalhamento reflexivo especular de quantidades elementares de momentum linear transportadas por ondas eletromagnéticas incidentes, é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_e}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \vec{r}_0(\beta) \times [\vec{l}' \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} + \\
 & + (\vec{l}' \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} - \vec{l}' + \hat{k}'(\hat{k}' \cdot \vec{l}')] \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

A fração restante do vetor taxa elementar de momentum angular induzido sobre um elemento de área da superfície do corpo, por meio de espalhamento reflexivo difuso de quantidades elementares de momentum linear transferidas por ondas eletromagnéticas, é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\alpha_d}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \vec{r}_0(\beta) \times [\vec{l}' \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} + (\vec{l}' \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \cdot \\
 & \cdot \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l}' \cdot \vec{v}'}{c})} + \pi \vec{k}'] \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Então para obter-se, à partir das contribuições elementares expressões equações (3.4), (3.5) e (3.6), o vetor taxa elementar de momentum angular $\vec{N}_i(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t)$,

induzido sobre um elemento de área $dA(\beta', t)$ da superfície do corpo, por meio transferência de quantidades elementares de momentum linear através de ondas eletromagnéticas, dever-se-á somar todas as contribuições em todas as possíveis direções angulares (θ', ϕ') , onde a coordenada angular colatitudinal θ' varia, em unidades de radianos, entre os valores 0 e $\pi/2$ e a coordenada angular azimutal ϕ' varia, em unidades de radianos, entre os valores 0 e 2π , o que resulta na expressão

$$\begin{aligned}
 \vec{N}_i(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta, t) = & - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_a}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \vec{r}_0(\beta) \times \\
 & \times [\vec{l} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + (\vec{l} \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})}] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi' - \\
 & - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_e}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \vec{r}_0(\beta) \times [\vec{l} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + \\
 & + (\vec{l} \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + \vec{l}] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi' - \\
 & - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_d}{c} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \vec{r}_0(\beta) \times [\vec{l} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + \\
 & + (\vec{l} \cdot \frac{\vec{v}'}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c})} + \pi \vec{k}'] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi'. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Então supondo-se que o módulo do vetor velocidade relativa $\|\vec{v}'\|$, entre os sistemas de referência solidários ao centro geométrico do elemento de área e ao centro de massa do corpo material orbitante, assume valores fisicamente pequenos quando comparados com o valor do módulo da velocidade da luz no vácuo c , pode-se reescrever a expressão

(3.7) como

$$\begin{aligned}
 \vec{N}_i(\nu, \beta, t) = & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \vec{r}_0(\beta', T) \times \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{\vec{v}'}{c} \right] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi' - \frac{\alpha_e}{c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \cdot \\
 & \cdot \vec{r}_0(\beta', T) \times \left[\hat{k}' (\hat{k}' \cdot \vec{l} - 5\vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c}) \right] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi' - \\
 & - \frac{\alpha_d}{c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu dA(\beta', t) \vec{r}_0(\beta', T) \times \left[\vec{l} - 3\vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} + \right. \\
 & \left. + \pi \vec{k}' - 2\pi \vec{k}' \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}'}{c} \right) \right] \text{sen} \theta' d\theta' d\phi'. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

3.2. Torque de Radiações Eletromagnéticas Termo-Emitidas

Considere, como corpo dado de forma superficial suavemente convexa, um corpo esférico como o definido na secção 1.2. Então pode-se escrever para um observador solidário a um sistema de referência conectado ao centro geométrico do elemento de área da superfície do corpo material orbitante, o vetor taxa elementar de momentum angular, equação (3.5), induzido pelo elemento de área $R^2 \text{sen} \theta d\theta d\phi$, cuja direção é a da normal ao elemento de área, e com sentido do interior para o exterior do corpo, que para um observador solidário ao sistema de referência conectado ao elemento de área é $R\vec{l}^0$, por meio de emissão de quantidades elementares de momentum linear através de ondas eletromagnéticas, como sendo

$$-\frac{2}{3c} I^0(\nu, \beta', t) d\nu^0 \vec{r}_0(\beta', t) \times \vec{l}^0 R^2 (\text{sen} \theta d\theta d\phi)^0. \quad (3.9)$$

Entretanto para um observador solidário ao sistema de referência conectado com o centro geométrico do corpo material orbitante esférico, o vetor taxa elementar de momentum angular $\vec{N}_t(\nu, \beta', t)d\nu dA(\beta', t)$ induzido por meio de emissão de quantidades elementares de momentum linear transportados por ondas eletromagnéticas, como sendo

$$\begin{aligned} \vec{N}_t(\nu, \beta', t)d\nu dA(\beta', t) = & -\frac{2}{3c}I(\nu, \beta', t)d\nu \vec{r}_0(\beta', t) \times \frac{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2})} \left[\vec{l} \frac{(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c})} + \right. \\ & \left. + (\vec{l} \cdot \frac{\vec{v}}{v}) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c})} \frac{\vec{v}}{v} - \frac{\frac{\vec{v}}{c}}{(1 - \frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c})} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde \vec{v} é o vetor velocidade relativa entre os sistemas de referência solidários ao elemento de área da superfície e ao centro geométrico do corpo orbitante.

Então supondo-se que o módulo do vetor velocidade relativa $\|\vec{v}\|$ entre os sistemas de referência solidários ao centro geométrico do elemento de área e ao centro de massa do corpo material orbitante assume valores fisicamente pequenos quando comparados com o valor do módulo da velocidade da luz no vácuo c , pode-se reescrever a expressão (3.10) como

$$\vec{N}_t(\nu, \beta', t)d\nu dA(\beta', t) = -\frac{2}{3c}I(\nu, \beta', t)d\nu \vec{r}_0(\beta', t) \times \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3.11)$$

Então, o vetor taxa elementar de momentum angular $\vec{N}_t(\nu, \beta, t)d\nu$ é dado pela soma de todas as contribuições elementares de todos os possíveis elementos de área da superfície do corpo material orbitante, onde a coordenada angular colatitudinal θ varia, em unidades de radianos, entre 0 e π e a coordenada angular azimutal ϕ varia, em unidades de radianos, entre os valores 0 e 2π

$$\vec{N}_t(\nu, \beta, t)d\nu = -\frac{2}{3c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I(\nu, \beta', t)d\nu \vec{r}_0(\beta', t) \times \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3.12)$$

Integrando em todas as possíveis frequências tem-se como resultado o vetor taxa de momentum angular $\vec{N}_t(\beta, t)$, isto é, a expressão

$$\vec{N}_t(\beta, t) = -\frac{2}{3c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} I(\nu, \beta', t) d\nu \vec{r}_0(\beta', t) \times \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3.13)$$

Se o corpo esférico de raio R , aqui considerado, for um corpo pertencente a classe dos corpos negros não-perfeitos, então a função $I(\nu, \beta', t)$ estará relacionada com a distribuição superficial de temperatura termodinâmica $u(\theta, \phi, \beta, t)$ pela relação (1.7). Então o vetor taxa total de momentum angular $\vec{N}_t(\beta, t)$ induzido através de emissão de quantidades elementares de momentum linear por meio de ondas eletromagnéticas devida à uma distribuição superficial de temperatura termodinâmica $u(\theta, \phi, \beta, t)$ que o dado corpo apresenta, é obtida pela soma de todas as contribuições elementares em todas as frequências das ondas eletromagnéticas pela qual o corpo transfere quantidades elementares de energia para o seu exterior, onde as frequência variam, em unidades do inverso do tempo, entre os valores nulo e o fisicamente infinito

$$\begin{aligned} \vec{N}_t(\beta, t) = -\frac{2}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \epsilon \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{ku(\theta, \phi, \beta, t)}\right) - 1} \vec{r}_0(\beta', t) \times \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] \cdot \\ \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (3.14)$$

resolvendo-se a integração nas frequências, tem-se

$$\vec{N}_t(\beta, t) = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u^4(\theta, \phi, \beta, t) \vec{r}_0(\beta', t) \times \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3.15)$$

A distribuição superficial de temperatura termodinâmica $u(\theta, \phi, t, \beta)$ que a superfície do corpo negro não-perfeito apresenta pode ser escrita sob a mesma forma que a apresentada na expressão (1.19), então substituindo-a na expressão do vetor taxa de momentum angular $\vec{N}_t(\beta, t)$, equação (3.15) e levando em conta o anterior procedimento

de linearização, tem-se

$$\begin{aligned}\vec{N}_t(\beta, t) = & -\frac{2}{3} \frac{\epsilon \sigma}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0^4(\beta) \vec{r}_0(\beta', t) \times \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi - \\ & -\frac{8}{3} \frac{\epsilon \sigma}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{nm\nu}(\beta) j_{n\nu} \left[(-i\nu \frac{\rho_{CP}}{k})^{1/2} R \right] \cdot \\ & \cdot P_{nm}(\cos \theta) \exp(im\phi) \exp(i\nu t) \vec{r}_0(\beta', t) \times \left[\vec{l} - \vec{l} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{v}}{c} \right) - \frac{\vec{v}}{c} \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi d\nu. \quad (3.16)\end{aligned}$$

3.3. Aplicações para Fontes de Radiações Eletromagnéticas de Dimensões Pontuais

Incidência de Radiações

Suponha que o corpo material fonte de radiações eletromagnéticas apresente-se para um observador situado em algum ponto da superfície do corpo material orbitante como um ponto singular a uma distância fisicamente infinita situada na posição angular aparente (θ^*, ϕ^*) no sistema de coordenadas polares esféricas associado ao centro geométrico do corpo material orbitante, a expressão (3.8) reduzir-se-á

$$\begin{aligned}\vec{N}_i(\nu, \beta, t) d\nu dA(\beta', t) = & -\frac{\alpha_a}{c} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \vec{r}_0(\beta', T) \times \left[\vec{l}^* - \vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} \right] - \\ & - \frac{\alpha_e}{c} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \vec{r}_0(\beta', T) \times \left[\vec{l}(\vec{l} \cdot \vec{l}^*) - 5\vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} \right] - \\ & - \frac{\alpha_d}{c} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \vec{r}_0(\beta', T) \times \left[\vec{l}^* - 3\vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} + \pi \vec{k}' - 2\pi \vec{k}' \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{v}'}{c} \right) \right]. \quad (3.17)\end{aligned}$$

e integrando sobre todos os elementos de área da superfície do corpo orbitante e sobre todas as possíveis frequências, tem-se a expressão

$$\vec{N}_i(\nu, \beta, t) = -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu \vec{r}_0(\beta', T) \times \left[\vec{l}^* - \vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu \vec{r}_0(\beta', T) \times \left[\vec{l}(\vec{l} \cdot \vec{l}^*) - 5\vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
& -\frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu \vec{r}_0(\beta', T) \times \left[\vec{l}^* - 3\vec{l}^* \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} + \right. \\
& \left. + \pi \vec{k}' - 2\pi \vec{k}' \left(\frac{\vec{l}^* \cdot \vec{v}'}{c} \right) \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $I(\nu, \beta', t)$ é dada pela expressão (1.37). Suponha que o vetor velocidade relativa \vec{v}' entre os sistemas de referência conectados ao elemento de área da superfície e ao centro geométrico do corpo material orbitante seja dada pela expressão $-\vec{\omega} \times \vec{x}^r - \dot{\vec{x}}^m$, então a expressão (3.18) reduz-se à

$$\begin{aligned}
\vec{N}_i(\nu, \beta, t) = & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu \left[R^2 \frac{\vec{l}^* \times (\vec{\omega} \times \vec{l}^*)}{c} + R \frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
& -\frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu \left[R^2 \frac{\vec{l}^* \times (\vec{\omega} \times \vec{l}^*)}{c} + R \frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
& -\frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t, \theta', \phi') d\nu \left[R^2 \frac{\vec{l}^* \times (\vec{\omega} \times \vec{l}^*)}{c} + R \frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} + \right. \\
& \left. + \pi R \vec{l}^* \times \vec{l} + 2\pi R^2 \vec{l}^* \times \vec{l} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

e abrindo os duplo produtos, tem-se a expressão

$$\begin{aligned}
\vec{N}_i(\nu, \beta, t) = & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu \left[R^2 \frac{\vec{\omega} - \vec{l}^* (\vec{\omega} \cdot \vec{l}^*)}{c} + R \frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
& -\frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu \left[R^2 \frac{\vec{\omega} - \vec{l}^* (\vec{\omega} \cdot \vec{l}^*)}{c} + R \frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
& -\frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu \left[R^2 \frac{\vec{\omega} - \vec{l}^* (\vec{\omega} \cdot \vec{l}^*)}{c} + R \frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} + \right. \\
& \left. + \pi R \vec{l}^* \times \vec{l} + 2\pi R^2 \vec{l}^* \times \vec{l} \left(\frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} \right) \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Reordenando os termos tem-se

$$\begin{aligned}
 \vec{N}_i(\nu, \beta, t) = & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu R^2 \frac{\vec{\omega} - \vec{l}^*(\vec{\omega} \cdot \vec{l}^*)}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
 & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu R \frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
 & -\frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu R^2 \frac{\vec{\omega} - \vec{l}^*(\vec{\omega} \cdot \vec{l}^*)}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
 & -\frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu R \frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
 & -\frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu R^2 \frac{\vec{\omega} - \vec{l}^*(\vec{\omega} \cdot \vec{l}^*)}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
 & -\frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu + R \frac{\vec{l}^* \times \dot{\vec{x}}^m}{c} R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
 & -\frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu \pi R \vec{l}^* \times \vec{l} R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\
 & -\frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(\nu, \beta', t) d\nu 2\pi R^2 \vec{l}^* \times \vec{l} \left(\frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

os segundo, quarto, sexto e oitavo termos são devidos à velocidade de translação do corpo, o sétimo termo anula-se e os termos restantes são devidos à frequência de rotação através da velocidade angular de rotação.

Emissão Térmica de Radiações

Para a expressão do vetor taxa de momentum angular $\vec{N}_t(\beta, t)$ o vetor velocidade relativa entre os sistemas de referência solidários ao centro de massa do elemento de área e ao centro de massa do corpo material orbitante pode ser descrito pela expressão $-\vec{\omega} \times R\vec{l}$

e também o vetor $\vec{r}_0(\beta)$ é descrito pela expressão $R\vec{l}$, então pode-se reescrever a expressão (3.16) como sendo

$$\begin{aligned} \vec{N}_t(\beta, t) = & -\frac{2}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0^4(\beta) \vec{r}_0(\beta', t) \times \left[\frac{\vec{\omega} \times R\vec{l}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi - \\ & -\frac{8}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{nm\nu}(\beta) j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho_{CP}}{k} \right)^{1/2} R \right] P_{nm}(\cos\theta) \exp(im\phi) \cdot \\ & \cdot \exp(i\nu t) \vec{r}_0(\beta', t) \times \left[\frac{\vec{\omega} \times R\vec{l}}{c} \right] R^2 \sin\theta d\theta d\phi d\nu. \end{aligned} \quad (3.22)$$

ou expandindo-se os duplos produtos externos presentes na expressão (3.22), obtém-se a expressão

$$\begin{aligned} \vec{N}_t(\beta, t) = & -\frac{2}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_0^4(\beta) [\vec{\omega} - \vec{l}(\vec{\omega} \cdot \vec{l})] R^4 \sin\theta d\theta d\phi - \\ & -\frac{8}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{nm\nu}(\beta) j_{n\nu} \left[\left(-i\nu \frac{\rho_{CP}}{k} \right)^{1/2} R \right] P_{nm}(\cos\theta) \cdot \\ & \cdot \exp(im\phi) \exp(i\nu t) [\vec{\omega} - \vec{l}(\vec{\omega} \cdot \vec{l})] R^4 \sin\theta d\theta d\phi d\nu. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Resolvendo as integrações nas variáveis angulares θ e ϕ , obtém-se

$$\vec{N}_t(\beta, t) = -\frac{32}{9} \frac{\epsilon\sigma}{c^2} \pi R^4 u_0(\beta) \vec{\omega}. \quad (3.24)$$

Capítulo Quarto

Fontes de Radiações Eletromagnéticas de Dimensões Finitas

Existem, dentro do domínio de condições físicas iniciais do sistema físico completo, pelo menos um subconjunto de condições físicas iniciais onde a restrição, no problema de Kepler, de que as dimensões físicas do corpo fonte de radiações eletromagnéticas seja negligenciável, não pode ser considerada aceitável. Portanto, ao contrário de aparentar simplesmente de se ser um singular ponto emissor de radiações eletromagnéticas, o corpo fonte de radiações eletromagnéticas aparecerá dominando um região angular finita, na qual obriga-se considerar, para cada elemento de área da superfície do corpo orbitante, que as radiações podem incidir de diferentes ângulos, não somente no cálculo de absorção de quantidades de momentum linear e de energia, mas também, e talvez mais importante seja, no processo de espalhamento reflexivo das radiações eletromagnéticas incidentes.

O desenvolvimento não-relativístico pode facilmente ser obtido à partir do tratamento relativístico restrito por meio do desprezo dos termos envolvendo expoentes de \vec{v}/c .

4.1. Forças de Radiações Eletromagnéticas Incidentes

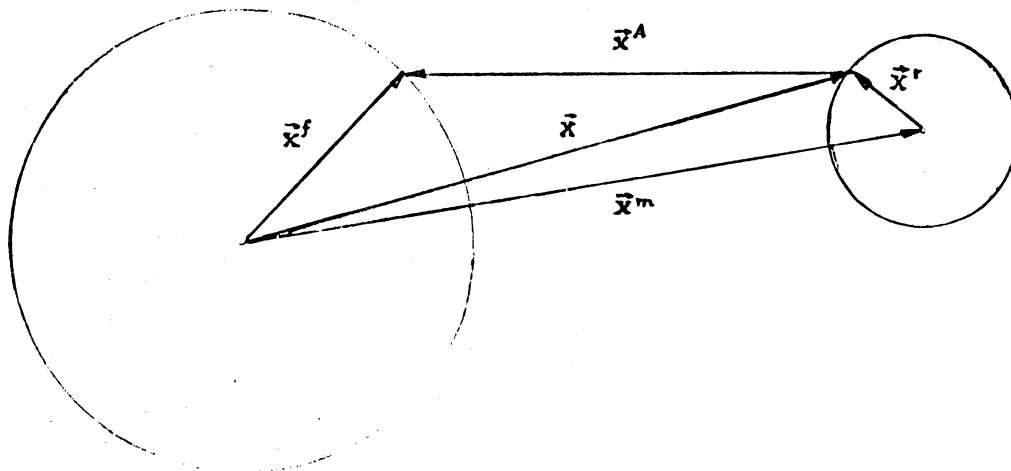


figura (4.1)

Considere um corpo material orbitante de forma superficial esférica, cujo centro de massa está numa posição referenciada pelo vetor posição \vec{x}^m à partir do centro de massa do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, e um elemento de área da superfície de forma esférica de raio R do corpo material orbitante, cujo centro geométrico está situado em uma posição referenciada pelo vetor posição \vec{x}^r à partir do centro de massa do corpo orbitante. Considere um elemento de área da superfície de forma esférica de raio R_0 do corpo fonte emissora de radiações eletromagnéticas, que está numa posição referenciada pelo vetor posição \vec{x}^f à partir do centro de massa do corpo fonte de radiações, como mostra esquematicamente a figura (4.1).

Pode-se escrever a expressão do vetor taxa de momentum linear $\vec{F}_i(\beta, t)$ devida à transferência de quantidades de momentum linear por meio de ondas eletromagnéticas incidentes equações (2.5), (2.6) e (2.7), para o caso em que tem-se um corpo fonte de

radiações eletromagnéticas como o acima explicitado, isto é, de dimensões lineares não-negligenciáveis, como sendo a expressão

$$\begin{aligned} \vec{F}_i(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) &= -\frac{\alpha_a}{c} \int_{\text{fonte}} \int I(\nu, \beta', t) \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} d\nu dA(\beta', t) \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} - \\ &-\frac{\alpha_e}{c} \int_{\text{fonte}} \int I(\nu, \beta', t) \left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} + 2 \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \right) \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \right] d\nu dA(\beta', t) \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} - \\ &-\frac{\alpha_d}{c} \int_{\text{fonte}} \int I(\nu, \beta', t) \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} + \pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \right) d\nu dA(\beta', t) \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde \vec{x}^A é dada pela expressão $\vec{x}^f - \vec{x} - \vec{x}^r$, cujo módulo representa a distância que separa os elementos de área do corpo fonte de radiações e do corpo material orbitante, $dS(\vec{x}^f)$ é o elemento diferencial de área, que ilumina o elemento de área do corpo orbitante, do corpo fonte de radiações eletromagnéticas e $I(\nu, \beta, t)$ é a taxa de energia sob forma de ondas eletromagnéticas é dada pela expressão abaixo

$$I(\nu, \beta', t) = \begin{cases} -I_0(\nu, \beta, t) \left[\frac{\vec{x}^A \cdot \vec{x}^f}{\|\vec{x}^A\| \|\vec{x}^f\|} \right] \left[\frac{\vec{x}^A \cdot \vec{x}^r}{\|\vec{x}^A\| \|\vec{x}^r\|} \right] & \text{se } [...] \leq 0. \\ 0 & \text{se } [...] < 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Entretanto para um observador solidário à um sistema de referência ligado ao centro de massa do elemento de área do corpo material orbitante a expressão (4.1) é dada por

$$\begin{aligned} \vec{F}_i(\beta, t) &= -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})} + \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{v} \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})} \right] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} - \frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\|\vec{x}^A\|}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \\
& \cdot \left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\|\vec{x}^A\|}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})} + \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{v} \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\|\vec{x}^A\|}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\|\vec{x}^A\|}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})} \right) \right] \\
& \cdot - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} - \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \right) \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \Big]. \\
& \cdot \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} - \frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \frac{(1 - \frac{\|\vec{x}^A\|}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \\
& \cdot \left(\left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \frac{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2}}{(1 - \frac{\|\vec{x}^A\|}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})} + \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{v} \right) \frac{(1 - (1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})^{1/2})}{(1 - \frac{\|\vec{x}^A\|}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})} \frac{\vec{v}'}{v} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\frac{\vec{v}'}{c}}{(1 - \frac{\|\vec{x}^A\|}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})} \right] + \pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \right) \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Supondo que o módulo da velocidade entre os dois sistemas de referência pode ser considerado pequeno quando comparado com o módulo da velocidade da luz no vácuo, então pode-se reescrever a expressão anterior até a primeira ordem em \vec{v}'/c ,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_i(\beta, t) = & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\vec{v}'}{c} \right] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} - \frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \\
& \cdot \left[\frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \cdot \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \right) - 5 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c} \right) - \frac{\vec{v}'}{c} \right] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} - 3 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\vec{v}'}{c} + \pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} - 2\pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c} \right) \right] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} \quad (4.4)
\end{aligned}$$

4.2. Forças de Radiações Eletromagnéticas Termo-Emitidas

Pode-se reescrever a expressão da distribuição superficial de taxa de energia eletromagnética, para um observador solidário a um sistema de referência conectado ao centro geométrico do corpo fonte de radiações eletromagnéticas, devida à absorção de quantidades elementares de radiações sob forma de ondas eletromagnéticas incidentes para o caso em que tem-se um corpo fonte de radiações eletromagnéticas como o acima explicitado, isto é, de dimensões lineares não-negligenciáveis, como

$$I(\nu, \beta', t) d\nu = \frac{\alpha_a}{c} \int_{\text{fonte}} I'(\nu, \beta', t) d\nu \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2}, \quad (4.5)$$

onde $I'(\nu, \beta, t)$ é a taxa de energia sob forma de ondas eletromagnética com frequências entre ν e $\nu + d\nu$ incidentes, função do parâmetro temporal t e de um conjunto, aqui arbitrário, de parâmetros físicos β é dada pela expressão abaixo

$$I'(\nu, \beta', t) = \begin{cases} -I_0(\nu, \beta, t) \left[\frac{\vec{x}^A \cdot \vec{x}^f}{\|\vec{x}^A\| \|\vec{x}^f\|} \right] \left[\frac{\vec{x}^A \cdot \vec{x}^r}{\|\vec{x}^A\| \|\vec{x}^r\|} \right] & \text{se } [\dots][\dots] \leq 0; \\ 0 & \text{se } [\dots][\dots] > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

E para um observador solidário a um sistema de referência conectado ao centro geométrico do elemento de área da superfície do corpo material orbitante, à partir destas

considerações apresentadas acima, a expressão da distribuição superficial de taxa de energia eletromagnética devida à absorção de quantidades elementares de radiações sob forma de ondas eletromagnéticas incidentes equação (4.5) para o caso em que tem-se um corpo fonte de radiações eletromagnéticas como o acima explicitado, isto é, de dimensões lineares não-negligenciáveis, como

$$I(\nu, \beta', t) d\nu = \frac{\alpha_a}{c} \int \int_{\text{fonte}} I'(\nu, \beta', t) d\nu \frac{(1 - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})^2}{(1 - \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}{c^2})} \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2}. \quad (4.7)$$

Fazendo a aproximação até primeira ordem de $\|\vec{v}'\|/c$ tem-se a expressão para a distribuição da taxa de energia eletromagnética incidente à superfície do corpo material orbitante

$$I(\nu, \beta', t) d\nu = \frac{\alpha_a}{c} \int \int_{\text{fonte}} I'(\nu, \beta', t) d\nu [1 - 2(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{v}'}{c})] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2}, \quad (4.8)$$

4.3. Aplicações do Modelo para Fontes de Dimensões Finitas

Taxa de Momentum Linear Incidente

Supondo que o vetor velocidade relativa \vec{v} entre os sistemas de referência conectados ao elemento de área da superfície e ao centro geométrico do corpo material orbitante seja dada pela relação $-\dot{\vec{x}}^m - \vec{\omega} \times \vec{x}^r + \vec{\omega}^o \times \vec{x}^f$, então a expressão (4.4) é dada por

$$\begin{aligned} \vec{F}_i(\beta, t) = & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int \int_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} + \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right) + \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c}] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} - \frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \iint_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \cdot \\
& \cdot \left[\frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \cdot \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \right) + 5 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right) + 5 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) - \right. \\
& \left. - 5 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right) + \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} - \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} - \\
& - \frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \iint_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} + 3 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right) + \right. \\
& \left. + 3 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) - 3 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right) + \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} - \right. \\
& \left. - \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} + \pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} - 2\pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} - 2\pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right) \right] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

ou reordenando os termos semelhantes, tem-se

$$\begin{aligned}
\vec{F}_i(\beta, t) = & -\frac{\alpha_a}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \iint_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} + \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) - \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right) + \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} - \right. \\
& \left. - \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} - \frac{\alpha_e}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \iint_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \cdot \\
& \cdot \left[\frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \cdot \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \right) + 5 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right) + 5 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right) + \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} - \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \Big] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} - \\
& - \frac{\alpha_d}{c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{\text{fonte}} I(\nu, \beta', t) d\nu dA(\beta', t) \left[\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} + 3 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right) + \right. \\
& + 3 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) - 3 \frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right) + \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} - \\
& - \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} + \pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} - 2\pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} - 2\pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) - \right. \\
& \left. \left. - 2\pi \frac{\vec{x}^r}{\|\vec{x}^r\|} \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right) \right] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

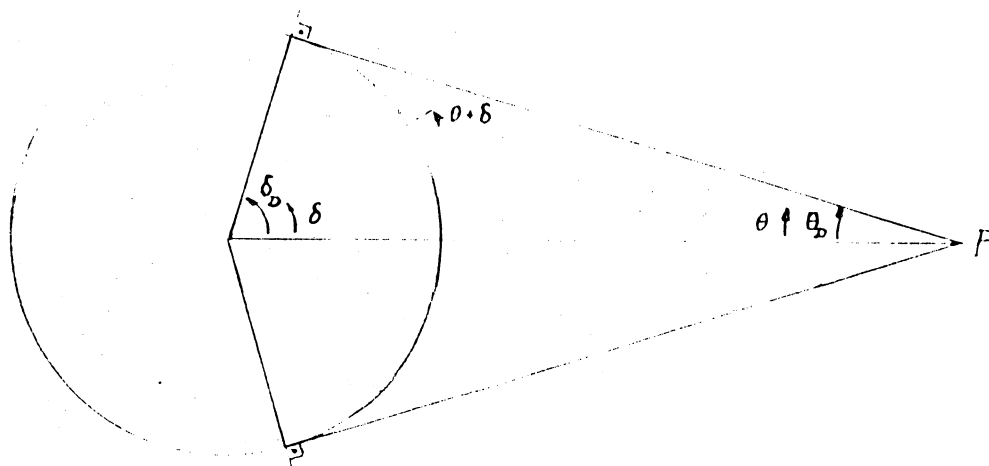
onde os termos que envolvem $\vec{\omega} \times \vec{x}^r/c$ fornecem o efeito Doppler-Diferencial, os termos envolvendo $\dot{\vec{x}}^m/c$ fornecem o efeito Poynting-Robertson, os termos envolvendo $\vec{\omega} \times \vec{x}^r/c$ fornecem um efeito desconhecido na literatura e os termos restantes fornecem o modelo de Pressão de Radiações.

Taxa de Energia Incidente

Supondo que o vetor velocidade relativa \vec{v}' entre os sistemas de referência conectados ao elemento de área da superfície e ao centro geométrico do corpo material orbitante seja dada pela relação $-\dot{\vec{x}}^m - \vec{\omega} \times \vec{x}^r + \vec{\omega}^o \times \vec{x}^f$, então a expressão (4.8) é dada por

$$\begin{aligned}
I(\nu, \beta', t) d\nu &= \frac{\alpha_a}{c} \int \int_{\text{fonte}} I'(\nu, \beta', t) d\nu \left[1 + 2 \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}^r}{c} \right) + 2 \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\dot{\vec{x}}^m}{c} \right) - \right. \\
& \left. - 2 \left(\frac{\vec{x}^A}{\|\vec{x}^A\|} \cdot \frac{\vec{\omega}^o \times \vec{x}^f}{c} \right) \right] \frac{dS(\vec{x}^f)}{\|\vec{x}^A\|^2}, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

onde os diversos termos são devidos aos efeitos discriminados para a expressão (4.10).

**figura (4.2)**

4.4. Experimento Computacional Semi-Analítico para Fontes Finitas

Considere um corpo fonte, emissor homogêneo e isótopo de radiações eletromagnéticas, cuja forma superficial é esférica e de raio R_0 , e um ponto P do espaço exterior ao corpo fonte, referenciado pelo vetor posição \vec{x} em relação a um sistema de referência ligado ao centro geométrico do corpo fonte emissor.

Considere um elemento de área da superfície do corpo fonte situado na posição \vec{x}^f em relação ao sistema de referência, como apresenta esquematicamente a figura (4.2).

Então, a taxa de energia sob forma de ondas eletromagnéticas, recebida por um observador situado no ponto P do espaço exterior ao corpo fonte, é dada pela soma de todas as possíveis contribuições de todos os elementos de área da superfície do corpo fonte de radiações, isto é, pela expressão

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_D} I_0 \cos(\theta + \delta) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.12)$$

onde θ é o ângulo formado entre as direções de \vec{x} e de $\vec{x} - \vec{x}^f$, ϕ é o ângulo formado à partir de uma referência em torno do eixo \vec{x} , δ é o ângulo dado pela expressão transcendental

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \theta_D}{1 - \cos \delta \operatorname{sen} \theta_D}, \quad (4.13)$$

onde, como mostra a figura (4.2), θ_D está relacionado com os módulos dos vetores posição \vec{x}^f e \vec{x} , cujos valores são, respectivamente, R_0 e $\|\vec{x}\|$, através da expressão

$$\theta_D = \arcsen \frac{R_0}{\|\vec{x}\|}. \quad (4.14)$$

Eventualmente pode-se supor que $\|\vec{x}\|$ assume valores muito próximos do valor de R_0 . Então a expressão integral na equação (4.12) reduz-se à

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_D} I_0 \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi, \quad (4.15)$$

a qual é facilmente resolvida pela teoria do cálculo integral de funções, obtendo-se

$$2\pi I_0 \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{\|\vec{x}\|} \right)^2 \quad (4.16)$$

como o foi mostrado por Walch, 1984.

Entretanto, para valores de $\|\vec{x}\|$, em unidades de comprimento, não muito próximos do valor de R_0 , isto é, para valores de θ_D cada vez mais distintos do que $\pi/2$, a integral na equação (4.1) difere do valor obtido através da expressão integral na equação (4.3). Todavia, a expressão integral na equação (4.1) pode ser relacionada com a expressão integral na equação (4.2) por uma função que obviamente é dependente do valor do extremo de integração θ_D , como abaixo

$$1 + f(\theta_D), \quad (4.17)$$

onde $f(\theta_D)$ é uma função a ser determinada.

Pode-se escrever a expressão integral na equação (4.1) como

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_D} I_0 \cos(\theta + \delta) \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi = (1 + f(\theta_D)) \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_D} I_0 \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi. \quad (4.18)$$

Resolvendo-se a integração na variável angular axial ϕ , a expressão na equação (4.4) reduz-se à

$$\int_0^{\theta_D} \cos(\theta + \delta) \sin \theta d\theta = (1 + f(\theta_D)) \int_0^{\theta_D} \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (4.19)$$

Então, para determinar-se a função $f(\theta_D)$ deve-se inicialmente integrar numericamente o primeiro membro da igualdade da expressão na equação (4.19) para diversos valores de θ_D dentro do domínio de valores possíveis para este. Todos os cálculos efetuados utilizam precisão dupla.

O método aqui utilizado (Afonso et al., 1989) para a resolução proposta é a Segunda Regra de Simpson

$$I = \int_0^{\theta_D} g(\theta) d\theta \approx \frac{3}{8} \Delta\theta [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + \dots + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n], \quad (4.20)$$

onde I é a integral a ser solucionada, $g(\theta)$ é a representação genérica para o integrando contido em I e $\Delta\theta$ é o comprimento de cada subintervalo, dada pela expressão $\theta_n - \theta_{n-1}$. O domínio de integração é subdividido em n subintervalos, sendo que n deve ser múltiplo de 3. A notação do segundo membro da equação (4.20) visa simplificar a apresentação da expressão na equação (4.20) e representa

$$\begin{aligned} y_0 &= g(0\Delta\theta) \\ y_1 &= g(1\Delta\theta) \\ y_2 &= g(2\Delta\theta) \\ y_3 &= g(3\Delta\theta) \\ &\vdots \\ y_n &= g(n\Delta\theta) \end{aligned}$$

A Segunda Regra de Simpson acrescentamos a Técnica de Extrapolação de Richardson, que é utilizada para melhorar o resultado obtido com a expressão (4.20). Esta técnica baseia-se na aplicação repetida da Segunda Regra de Simpson.

O valor melhorado da integral I é dada pela expressão

$$I^* = I_2 + \frac{n_1^4}{n_2^4 - n_1^4}(I_2 - I_1), \quad (4.21)$$

onde I_1 é o valor numérico da integral I utilizando-se n_1 subintervalos na expressão (4.20) e I_2 é o valor da mesma integral quando utiliza-se n_2 subintervalos. Utilizou-se para n_2 o valor $3n_1$.

Constroi-se então uma tabela de valores, associando um dado valor θ_D , que varia, em unidades de radianos, entre 0 e $\pi/2$ exclusive, com o respectivo valor resultante da integração numérica do primeiro membro da equação (4.19), como apresentado na tabela (4.1). Neste trabalho utilizou-se uma tabela com 400 pontos.

θ_D	$\int_0^{\theta_D} (...)d\theta$
$\pi/2(000/400)$	0.000
$\pi/2(001/400)$	1.745 329 d-12
$\pi/2(002/400)$	3.926 991 d- 1
\vdots	\vdots
$\pi/2(399/400)$	5.000 000 d- 0

tabela (4.1)

O ângulo θ_D não pode assumir o valor igual a $\pi/2$ pois o observador não pode situar-se em um ponto sobreposto aos pontos emissores de radiações eletromagnéticas.

O método de integração numérica necessário à construção da tabela acima exige que o integrando $\cos(\theta + \delta)\text{sen}\theta$ seja avaliado em um conveniente número de pontos que estão igualmente espaçados, dentro do domínio de integração, por valores incrementais $\Delta\theta$.

Adotando-se aqui, por conveniência, uma divisão do domínio de integração em 30 pontos. Testam-se subdivisões maiores, como por exemplo 60, 90, 180, porém, o resultado numérico não apresentou variação significativa, além de aumentar muito o tempo de cálculo.

Como o integrando $\cos(\theta + \delta)\sin\theta$ é uma função complicada em termos da variável angular de integração θ , pois o ângulo δ está relacionado com os valores de θ e θ_D através da expressão transcendental na equação (4.13), é necessário avaliar o valor de δ para cada par de valores numéricos de θ_D e de θ presentes na integração numérica. Para isto constroi-se, a partir da expressão transcendente, equação (4.13), uma função auxiliar $h(\delta)$, como a abaixo

$$h(\delta) = \operatorname{tg}\theta(1 - \cos\delta\sin\theta_D) - \sin\delta\sin\theta_D, \quad (4.22)$$

Observe que de acordo com o problema físico-geométrico, os valores numéricos permitidos para o ângulo δ devem estar, em unidades de radianos, entre os valores 0 e $(\pi/2 - \theta_D)$.

Então, através do método de Newton-Raphson, procura-se o valor do zero da função auxiliar $h(\delta)$ para cada par de valores dados θ_D e θ . Obtem-se um único valor o ângulo δ em cada par de valores associados dos ângulos θ_D e de θ . O valor do ângulo δ será utilizado posteriormente nos cálculos do integrando $\cos(\theta + \delta)\sin\theta$ presente na expressão integral na equação (4.19). Para interromper o processo iterativo presente no método de Newton-Raphson, utilizou-se como critério de parada o teste de exatidão; o valor escolhido foi 10^{-10} rad .

Após ter-se gerado a tabela que associa diversos valores de θ_D com os respectivos valores resultados da integração numérica, executa-se uma pesquisa da função $f(\theta)$ que melhor se ajuste aos referidos pontos. Testando-se funções sob forma de série de potências, série de Fourier em senos e cossenos e série de Fourier em cossenos. Utilizando-se critérios

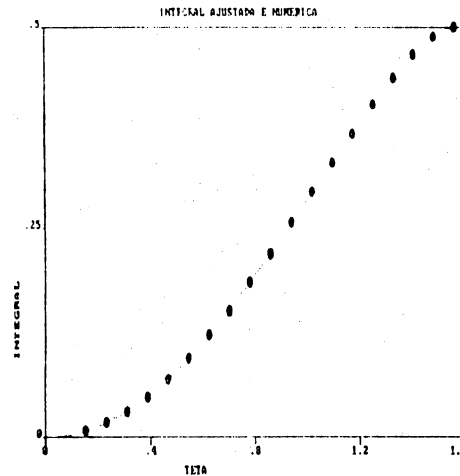


figura (4.3)

estatísticos, como o coeficiente de correlação de Pearson e o coeficiente χ^2 , conclui-se que a função que melhor se adapta é aquela na forma de série de Fourier em cossenos. Assim a expressão (4.19) torna-se

$$\int_0^{\theta_D} \cos(\theta + \delta) \sin \theta d\theta \approx \left(1 + \sum_{n=0}^{n=N} c_n \cos(n\theta_D)\right) \int_0^{\theta_D} \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (4.23)$$

Para este ajustamento dos N primeiros valores c_n presentes na expressão equação (4.23) utilizou-se um algoritmo baseado no Método dos Mínimos Quadrados (Castella e Miguel, 1986).

A forma da função integral no primeiro membro da equação (4.19) em função do ângulo aparente θ_D , que fisicamente está associada à distância da origem ao ponto observador, é a apresentada na figura (4.3).

Na prática é impossível calcular infinitos coeficientes c_n , assim, trunca-se a série na N -ésima parcela. Testando-se diversos pontos de truncamento ($N = 1, 2, 3, \dots, 9$) e verifica-se que com 9 parcelas consegue-se um bom ajustamento da função proposta na equação (4.23) com os dados da tabela esquematizada anteriormente.

n	$c_n(N = 3)$	$c_n(N = 6)$	$c_n(N = 9)$
1	-0.339805	-0.403376	-0.869393
2	-0.013896	+0.195270	+1.691289
3	+0.009602	-0.263166	-2.602713
4	————	+0.224985	+2.678666
5	————	-0.108386	-1.998613
6	————	+0.027711	+1.109617
7	————	————	-0.449621
8	————	————	+0.122518
9	————	————	-0.017813

tabela (4.2)

Coefficiente de Correlação de Pearson	0.999 999 993
Erro Padrão de estimativa	0.025 664
Erro Padrão Médio	0.000 014 081
Coefficiente χ^2	0.000 000 18

tabela (4.3)

A tabela (4.2) apresenta os coeficientes obtidos para algumas séries de Fourier em cossenos truncadas para valores de N iguais a 3, 6 e 9.

Para a função contendo 9 coeficientes, os parâmetros estatísticos obtidos são apresentados na tabela (4.3).

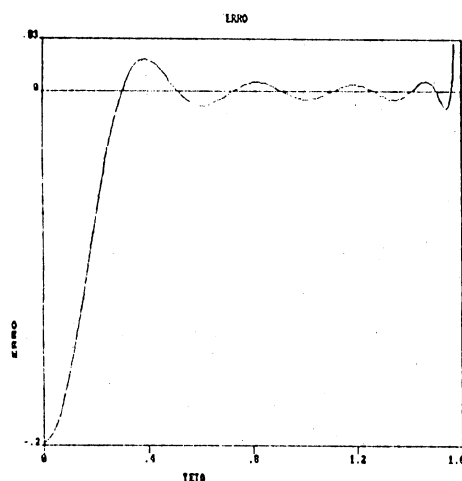


figura (4.4)

O gráfico do erro relativo, entre os valores calculados pela função ajustada ($N = 9$) e pela integração numérica do primeiro membro da equação (4.23), é o dado na figura (4.4).

À partir de dados obtidos por meio do satélite CASTOR (Walch, 1984), pode-se interpolar o valor médio da taxa de energia sob forma de radiações eletromagnéticas, predominantemente na região do infravermelho, transferida do interior para o exterior da Terra, utilizando-se a expressão integral aproximada equação (4.15), no que resulta no valor 217.0 Wm^{-2} , pois lá foi suposto que aquela aproximação era válida. Entretanto quando compara-se este resultado, observa-se uma divergência de -15.5% , com relação ao valor medido aceito de 256.7 Wm^{-2} (Stephens, 1981). Já utilizando-se a expressão do fator de conversão presente na equação (4.23), até os primeiros 9 termos, desenvolvido durante a secção, obtem-se o valor médio de 264.7 Wm^{-2} , o que resulta em um erro relativo de $+3.1\%$, com relação ao valor admitido.

Conclusões

Com o uso de uma equação diferencial dependente do tempo para descrever a difusão de energia térmica para corpos negros não perfeitos de forma superficial esférica foi possível mostrar que os efeitos conhecidos na literatura científica como efeito Yarkovsky e efeito Inverno-Verão não são na realidade fenômenos distintos, mas sim conseqüências da existência de uma inércia térmica característica.

A aplicação de um estudo para os casos em que as dimensões lineares do corpo fonte emissor de radiações eletromagnéticas não poderem ser negligenciadas conduz à alterações nos cálculos feitos da pressão de radiações difundidas pelo planeta Terra no satélite CASTOR.

O tratamento relativístico restrito, para os casos em que as dimensões lineares do corpo fonte emissor de radiações eletromagnéticas não poderem ser negligenciadas, até a primeira ordem em $|| \vec{v} || / c$ conduz com naturalidade aos efeitos conhecidos como Poynting–Robertson e Doppler–Diferencial.

Do modelo desenvolvido para as forças rotacionais de radiações eletromagnéticas extraem-se um termo cuja característica é a de sempre contribuir para o decréscimo do módulo do vetor momentum angular intrínseco de rotação do corpo material orbitante, o

que contribui para a explicação da diminuição da frequência de rotação apresentada pelo satélite LAGEOS.

O modelo para a força translacional de radiações eletromagnéticas fornece como resultado uma representação sob forma de um vetor força que pode ser utilizado em trabalhos posteriores, como por exemplo na determinação da variação dos elementos orbitais através das equações de Gauss da mecânica celeste. A semelhança desta proposição, pode-se determinar a evolução dos elementos orbitais de diversos grãos, interagindo entre si em órbitas concorrentes, componentes de uma nuvem precursora da formação de planetas.

Em adição, o modelo de forças rotacionais de radiações eletromagnéticas, também fornece como resultado uma representação sob forma de um vetor força rotacional, que descreve, na forma diferencial a evolução do vetor momentum angular intrínseco de rotação do corpo material orbitante. A partir disto pode-se inferir qual é a respectiva contribuição na atitude de um satélite que orbita o planeta Terra, por exemplo. Como o modelo de forças translacionais também depende do valor instantâneo do vetor momentum angular intrínseco de rotação, pode-se otimizar o conhecimento das variações dos elementos orbitais.

Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1965): *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York
- Afonso, G. B.; Barlier, F.; Carpino, M.; Farinella, P.; Mignard, F.; Milani, A. e Nobili, A.M. (1989): *Orbital Effects of LAGEOS Seasons and Eclipses*, *Annals Geophysicae*, in press
- Afonso, G. B.; Barlier, F. (comunicação pessoal)
- Afonso, G. B., Berleze, S. M. e Foryta, D. W. (1989): *Electromagnetic Radiation Force Due to Non-Singular Source*, *Celestial Mechanics*, a ser submetido
- Afonso, G. B. e Foryta, D. W. (1989): *An Anisothermal Emission Model for Small Bodies*, *Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects*, in press, R. V. Martins, D. Lazzaro e W. Sessin (eds.), Observatório Nacional, Rio de Janeiro
- Burns, J. A.; Lamy, P. L. and Soter, S. (1979): *Radiation Forces on Small Particles in the Solar System*, *Icarus*, **40**: 1-48
- Castela, F. e Miguel, J. (1986): *Curve Fitting Made Easy*, *Hydrocarbon Processing*, **nov**:121-124

- Guess, A. W. (1962): *Poynting–Robertson Effect for a Spherical Source of Radiation*, The Astrophysical Journal, **135**: 855–866
- Jackson, J. D. (1983): *Eletrodinâmica Clássica*, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro
- Poynting, J. H. (1903): *Radiation in the Solar System: its Effect on Temperature and its Pressure on Small Bodies*, Phi. Trans. Royal Society A, **202**: 525–552
- Robertson, H. P. (1937): *Dynamical Effects of Radiation in the Solar System*, Monthly Notice of Royal Astronomical Society, **97**: 423–437
- Stephens, G. L., Campbell, G. G. e von der Harr, T. H. (1981): *Earth Radiation Budgets*, Journal of Geophysical Research, **86C10**: 9739–9760
- Walch, J. J. (1984): *Etude de la Pression de Radiation Réémise par la Terre. Applications à la Climatologie et la Géodésie*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Louis Pasteur, Strasbourg